Editorial Rediech

Red de Investigadores Educativos Chihuahua A.C.
Registro Padrón Nacional de Editores
978-607-98139
https://www.rediech.org/omp/index.php/editorial/catalog

ISBN: 978-607-98139-6-3
https://rediech.org/omp/index.php/editorial/catalog/book/20

Luis Reina

Miguel R. Wilhelmi

2021

El problema didáctico del reconocimiento de los números irracionales en educación secundaria

En A. Y. Soto Lazcano y L. Suárez Téllez (coords.). *Repensar las didácticas específicas. Una aportación multidisciplinaria a la enseñanza especializada* (pp. 79-103). Chihuahua, México: Red de Investigadores Educativos Chihuahua.

CAPÍTULO IV

El problema didáctico del reconocimiento de los números irracionales en educación secundaria

Luis Reina
I.E.S. N°9-011 "Del Atuel" (Argentina)

Miguel R. Wilhelmi
Universidad Pública de Navarra (España)

Resumen

Se estudian algunas dificultades y conflictos que emergen del proceso de estudio de la noción de número irracional en Educación Secundaria. Se analizan dichas problemáticas desde el enfoque ontológico y semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. Se observa el fenómeno didáctico de *mimetismo didáctico* en el reconocimiento por parte de los estudiantes de la aperiodicidad numérica en las cifras decimales de números irracionales. Se incorpora la noción de fracción continua en el proceso de estudio y se analizan los resultados obtenidos. Mediante un análisis centrado en cuestiones ecológicas, cognitivas y de conceptualización de la noción matemática se obtiene explicación al fenómeno involucrado.

Introducción

La finalidad de este capítulo se centra en analizar los conflictos semióticos y dificultades que emergen en el reconocimiento e identificación de los números irracionales en Educación Secundaria. Este análisis motiva la incorporación del contenido curricular "fracción continua" a modo de innovación, ya que se trata de una noción no habitual en el currículo de matemática oficial de Argentina. El objetivo que se persigue es que la fracción continua permita la estabilización de los conocimientos de los estudiantes para la diferencia entre la periodicidad y la aperiodicidad de números reales. La experimentación permite la determinación de una propuesta educativa que aporta a docentes en formación inicial y en actividad una herramienta específica para la enseñanza de los números irracionales en Educación Secundaria.

Este trabajo emana de la sesión 89 del Seminario Repensar las Matemáticas, del 28 de septiembre del 2016, intitulada "Construcción de la noción de número irracional en Educación Secundaria: algunos conflictos y dificultades asociados a su enseñanza" (Reina, 2016a). Asimismo es fuente de referencia el trabajo "Estudio didáctico de la completitud del conjunto de los números reales", presentado en la sesión 75 del mismo seminario (Bergé, 2015).

El problema didáctico del desarrollo decimal de los números irracionales

El problema de enseñanza es la identificación y diferenciación, por su expresión decimal, de un número irracional de otro racional. Se trata de una diferenciación entre lo "aperiódico" y lo "periódico" en el desarrollo decimal de un número real. En la práctica totalidad de las tareas que usualmente se proponen a los estudiantes están desarrollos finitos de números con un número reducido de decimales, de tal forma que la identificación de los números racionales es inmediata. Esto crea una ilusión, según la cual la "racionalidad" o "irracionalidad" de un número se "ve", no siendo necesaria una actividad matemática específica para ello (figura 1).

1. Clasifiquen cada uno de los siguientes números en racionales (R) o irracionales (I).

a) 6 ☐	**d)** 4,75 ☐
b) 1,78942168431712953 ☐	**e)** 2,44444444… ☐
c) $0{,}12\overline{7}$ ☐	**f)** 0,123456789101112131415… ☐

Figura 1. Actividad de clasificación de números reales.

Fuente: Propuesta por un libro de texto de secundaria (Chorny, Salpeter y Krimker, 2009, p. 22).

La expresión decimal de un número racional es periódica cuando "una vez aparecido un cierto conjunto finito de cifras, dicho conjunto se repetirá infinitas veces"

(Courant y Robbins, 1962, p. 75). Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo (1969) apelan a las nociones de periodicidad y aperiodicidad para diferenciar números reales: "entonces, los números racionales resultan las expresiones decimales periódicas, y los números irracionales, las expresiones decimales aperiódicas" (p. 99).

Pero estas definiciones matemáticas implican para el estudiante reconocer "regularidades", "repeticiones" infinitas de cifras decimales y la emergencia de un "patrón" numérico.

Pero, ¿qué se entiende por estas nociones?

El diccionario de la Real Academia Española (2019) propone:

> regular[2]. Del lat. *regulâris*.
> 1. *adj*. Ajustado a una regla y conforme a ella. *Vuelo regular*.
> 2. *adj*. Uniforme, sin cambios grandes o bruscos. *Respiración regular*.
> 3. *adj*. Que se hace o se produce a intervalos regulares (||uniformes). *Acude a revisiones médicas regulares*.
>
> repetibilidad.
> 1. *f*. En la metodología científica, cualidad de repetible.
>
> patrón, na. Del lat. *patrônus*; la forma f., del lat. *patrôna*.
> 8. *m*. Modelo que sirve de muestra para sacar otra cosa igual.

Desde la Educación Matemática se alzan voces con diferentes posturas en relación con la noción de patrón:

> La idea básica en esta noción es que toda situación repetida con regularidad da lugar a un patrón [Steen, 1988, p. 611, y Stacey, 1989, pp. 147-149, citados en Castro, 1995, p. 33].
>
> Los patrones suelen formarse a partir de un núcleo generador; en algunos casos el núcleo se repite, en otros el núcleo crece de forma regular [Steen, 1988, p. 216, citado en Castro, 1995, p. 33].

Sin embargo, para otros especialistas no es posible establecer una definición precisa de patrón.

> Un patrón no es un reconocido y mucho menos bien definido, concepto de las matemáticas […] Un patrón no es un objeto matemático. Incluso los matemáticos que dicen que las matemáticas es la ciencia de patrones admitirían que están usando el término en un sentido extra-matemático, casi poético. No hay acuerdo entre los matemáticos de lo que los patrones son, ni acerca de sus propiedades y operaciones [Carraher, Martinez y Schliemann, 2008, p. 4].

Si bien parece que, matemáticamente hablando, no hay consenso entre los educadores matemáticos sobre lo que es un patrón, y no vamos a entrar en esa discusión, consideramos que un patrón numérico racional emerge luego del encuentro de una regularidad y de la repetibilidad infinita del bloque periódico.

Para un número racional la periodicidad en sus cifras decimales, a partir de una cierta cifra decimal, implica entonces el reconocimiento de la existencia de una repetibilidad infinita del bloque de cifras, con la misma regularidad (con el mismo orden de aparición) y con la emergencia de un patrón (figura 2).

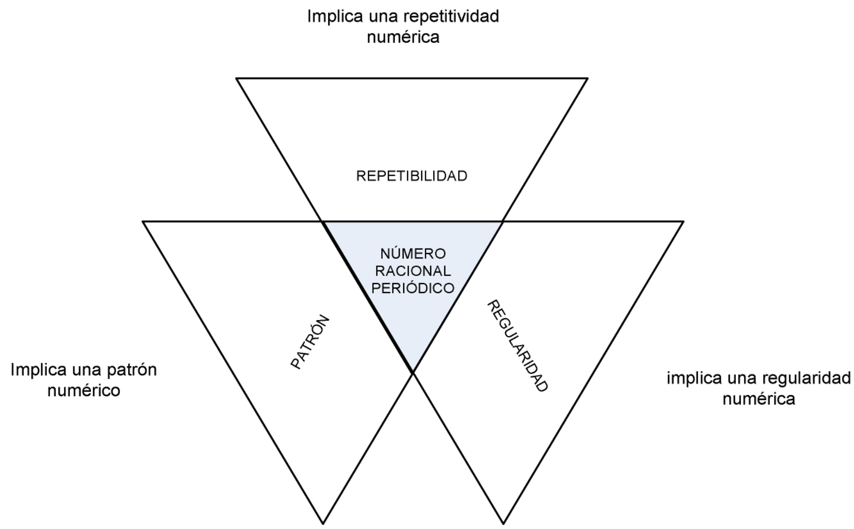


Figura 2. Relaciones entre las nociones de patrón, regularidad y repetitividad en las cifras decimales de número racional periódico.

Fuente: Reina, 2016b, p. 165.

Sin embargo, existen números racionales donde es difícil determinar el período. Por ejemplo, en la expresión decimal de $\frac{1}{97}$, el período comienza a partir del primer decimal, pero su identificación no es inmediata, dado que cuenta con 96 cifras decimales (tabla1).

El reconocimiento en este último número, del bloque finito de cifras decimales, las cuales conforman el período del número, con su regularidad en el orden de aparición de sus cifras individuales y su repetibilidad en bloque infinita, es complejo.

0,**010309278350515463917525773195876288659793814432989690721649484536082474226804123711340206185567**01030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979…

Tabla 1. Primeros mil decimales del número racional $\frac{1}{97}$, en subrayado y en negrita se muestra el período del número.

Fuente: Elaboración propia.

Las cifras decimales del número racional que se muestra en la tabla 1, y de los demás números reales de este trabajo, han sido obtenidas con el software wxMaxima (wxMaxima, s.f.), el cual es una interfaz gráfica del sistema de álgebra simbólica Máxima (Project Maxima, s.f.).

La sintaxis para la obtención de mil cifras decimales es la siguiente: en primera instancia se coloca en una celda la pantalla en modo gráfico 2D: `set_display('ascii)$`, luego se ingresa en otra celda el comando `fpprec:1000$bfloat(1/97)`; de esta manera se puede obtener miles de decimales de un número real.

Ahora bien, un número irracional, expresado en forma decimal, no presenta la existencia de periodicidad infinita, pero puede que presente "bloques finitos" de cifras decimales que se repiten. Los "números irracionales cebra" (Pickcover, 2007) son representativos de este tipo de números. La fórmula $f(n) = \sqrt{\frac{9}{121} \cdot 100^n + \frac{(112-44 \cdot n)}{121}}$ con n natural, genera este tipo de números para n = 10, 50, 55, 95, 155, etc. (Pickover, 2007, pp. 348-352), donde se forman bloques finitos de cifras que forman "pseudo-repetibilidades", pseudo-regularidades y pseudo-patrones (tabla 2).

2727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727 272727272727,2727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727 2727272727272727272727266563636363636363636363636363636363636363636363636363636363 6363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363 6363636363636363636363636363636363636363636363629398727272727272727272727272727272 7272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272 7272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272711532032727 2727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727 2727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727 2727272727272282598106363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636 3636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636 3636363636363636363636363636363636363622294131358072727272727272727272727272727272 7272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272 7272727272727272727272727272…

Tabla 2. Primeras mil cifras decimales del número irracional "cebra" $f(95)$.
Fuente: Elaboración propia.

Otros números irracionales se pueden construir a partir de una "ley de formación", o sea, a partir de patrones y de regularidades en sus cifras decimales. Uno de los ejemplos más representativos es el de D. G. Champernowne (1912-2000), en las cifras decimales de dicho número es posible observar un "patrón obvio" (Pickover, 2007, 354).

$$C_{10} = 0.12345678910111213141516...$$

Entonces aún un número irracional, desarrollado en expresión decimal, aperiódica, puede mostrar algunos patrones y regularidades (figura 3).

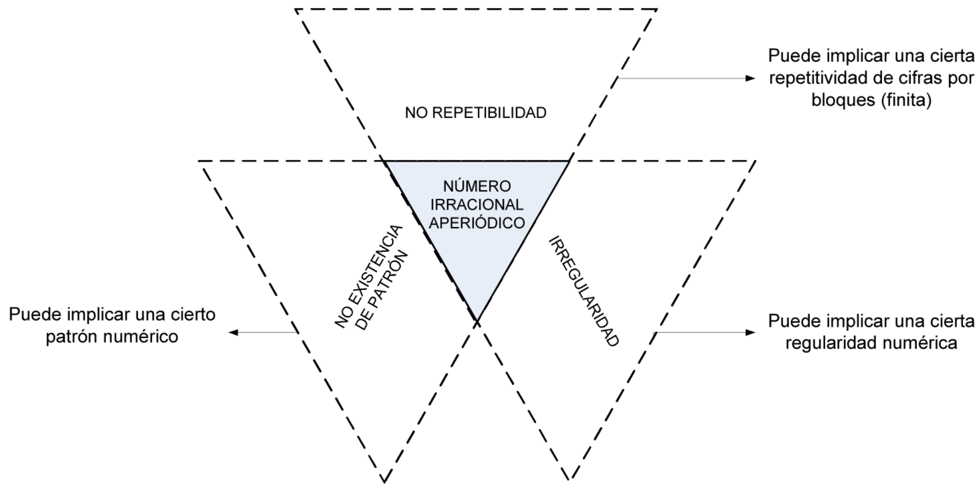


Figura 3. Posibles relaciones de implicancia entre nociones asociadas a la aperiodicidad de un número irracional desarrollado por decimales.

Fuente: Reina, 2016b.

Pero también algunos números racionales, como el siguiente,

$$a_{24} = 1/89999999999999999999999991,$$

presentan repetitividad de dígitos en bloques finitos dentro del período. La expresión decimal del número a_{24} muestra una regularidad que depende del número de nueves (9), que en el caso dado son 24 (tabla 3).

0,**00000000000000000000000001111111111111111111111111222222222222222222222222223333333333**
3333333333333334444444444444444444444444555555555555555555555555566666666666666666
66666666777777777777777777777777788888888888888888888888889000000000000000000000000
0111111111111111111111111122222222222222222222222223333333333333333333333333444444
4444444444444444444555555555555555555555555566666666666666666666666667777777777777
7777777777778888888888888888888888889000000000000000000000000011111111111111111111
1111122222222222222222222222223333333333333333333333333444444444444444444444444455
5555555555555555555555566666666666666666666666667777777777777777777777777888888888
8888888888888889000000000000000000000000011111111111111111111111112222222222222222
2222222223333333333333333333333333444444444444444444444444455555555555555555555555
5566666666666666666666666667777777777777777777777777888888888888888888888888900000
0000000000000000000011111111111111111111111112222222222222222222222222333333333333
333333333333344444444444444444444444…

Tabla 3. Los primeros mil decimales del número racional
1/89999999999999999999999991
presentan regularidad y periodicidad en bloques finitos de dígitos dentro del período (en subrayado y en negrita).

Fuente: Elaboración propia.

De tal manera que los números racionales de la forma

$$a_n = \frac{1}{8\underbrace{99\ldots99}_{n}1}$$

tienen como expresión decimal un periodo de longitud $8(n + 1) + n + 1$ formado por los 10 dígitos ordenados de forma creciente y repetidos "$n + 1$" veces de 0 a 7, ambos inclusive, "n" veces el 8 y un único 9 (tabla 4).

Nº de nueves (9)	1	2	3	...	24	...	n
Cifras 0-7	2	3	4	...	25	...	n+1
Cifra 8	1	2	3	...	24	...	n
Cifra 9	1	1	1	...	1	...	1
Longitud del período	18	27	36	...	225	...	$8(n + 1) + n + 1$

Tabla 4. Expresión decimal de los números de la forma $a_n = \frac{1}{8\underbrace{99\ldots99}_{n}1}$.
Fuente: Elaboración propia.

En resumen, el reconocimiento de un número racional o irracional solamente por la búsqueda de regularidades, patrones y repetitividad infinita en sus cifras decimales es complejo, si no se conoce su estructura de origen. De hecho, tal y como sucede con las sucesiones, donde un número finito de términos no permite determinar el siguiente, dado un número finito de decimales no se puede determinar el siguiente sin conocer la regla de formación. Estas observaciones, en suma, sugieren no centrarse en la representación, sino en el objeto, sus propiedades y la relación con otros objetos con los que comparte una cierta apariencia o forma matemática, pero cuya naturaleza es esencialmente distinta. Aquí la fracción continua aporta otra óptica relacionada.

Un número irracional puede tener un desarrollo periódico: la fracción continua

Se puede pensar en un número irracional en términos de sus cifras decimales infinitas aperiódicas, pero también es posible hacerlo a partir de otra forma de escritura del número, a saber, por su expresión en fracción continua.

> El desarrollo en fracción continua tiene, pues, dos ventajas sobre el desarrollo decimal; la de ser único y la de indicar claramente la naturaleza del número. Si la fracción es finita, el número es racional; si es indefinida éste es irracional [Rey, Pi y Trejo, 1969, p. 346].

Se puede probar que un número racional tiene una expresión en fracción continua "finita", mientras que un número irracional posee un desarrollo en fracción continua "infinita" (Spinadel, 1995; 2003).

Una fracción continua generalizada es una expresión de la forma,

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\dots}}}}$$

siendo los a_i y $b_i (i>0)$ números reales o complejos.

En este trabajo nos interesa la fracción continua "simple" o "regular" que tiene la forma

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

siendo que a_0 sea un número entero, los a_n enteros positivos y los b_n iguales a 1.

Una fracción continua de un número real puede tener diferentes notaciones, se adopta para este trabajo la forma reducida por cocientes incompletos o parciales.

Por ejemplo, el número racional 19/17 tiene una escritura finita en fracción continua regular: $\frac{19}{17} = 1 + \frac{1}{8+\frac{1}{2}}$, siendo el desarrollo en cocientes parciales: $\frac{19}{17} = [1; 8,2]$.

Mientras que un número irracional tiene un desarrollo infinito en fracción continua, y éste puede ser periódico o no.

> Al respecto, el matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813) probó que un número es irracional cuadrático si y solo si su descomposición en fracciones continuas es periódica (no necesariamente periódica pura) [Spinadel, 1995, p. 20].

En el caso de un irracional cuadrático, o sea un número irracional que es solución de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros, la periodicidad puede ser "pura" o "mixta". Se muestran a continuación dos ejemplos:

$1 + \sqrt{2} = [\overline{2; 2}]$ (fracción continua periódica pura)

$\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ (fracción continua periódica mixta)

Se puede observar, en los ejemplos desarrollados, que a partir de cierto término los cocientes parciales comienzan a ser periódicos, esto último implica relaciones de regularidad, repetibilidad de cocientes parciales y la emergencia de un patrón (figura 4).

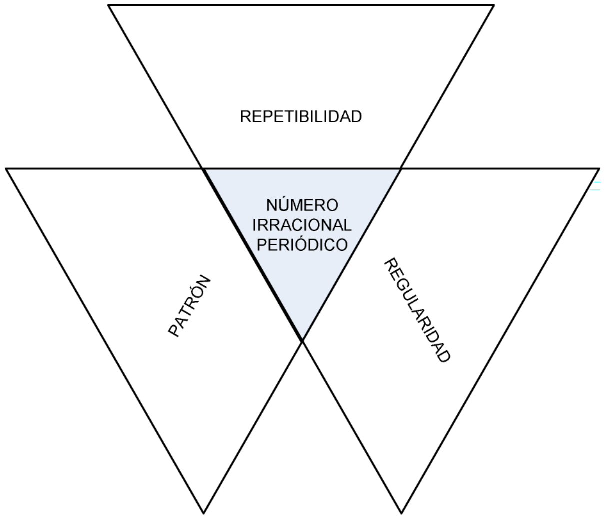


Figura 4. Posibles relaciones de implicancia entre nociones asociadas a un número irracional expresado en fracción continua periódica.
Fuente: Reina, 2016b.

Existen números irracionales, desarrollados en fracción continua, cuya expresión no es periódica, pero presenta ciertas regularidades, en sus cocientes incompletos, a partir de una cierta cifra y la emergencia de un patrón, por ejemplo, el número de Euler.

Precisamente es Euler quien estudia al número ***e*** en fracción continua, sus regularidades y patrones (Thakur, 1996, p. 248).

El número ***e*** manifiesta un desarrollo en fracción continua simple o regular no periódica, pero asimismo presenta cuasi-períodos (falso período donde se observa repetitividad infinita de algunos cocientes parciales) y dentro de ellos es posible observar una regularidad y la emergencia de un patrón numérico.

Cuasi-períodos

$$\boldsymbol{e} = [\mathbf{2}\,;\overbrace{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1}},\overbrace{\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{1}},\overbrace{\mathbf{1},\mathbf{6},\mathbf{1}},\overbrace{\mathbf{1},\mathbf{8},\mathbf{1}},\overbrace{\mathbf{1},\mathbf{10},\mathbf{1}},\ldots,\mathbf{1},\mathbf{1},\underbrace{\mathbf{2}\boldsymbol{n}}_{\textbf{patrón}},\mathbf{1},\ldots]\,,\mathbf{n}\in\mathbb{N}$$

regularidad

El desarrollo en fracción continua cuasi-periódica se puede expresar en forma general:

$$e = [2\,;\overline{1\,,2n\,,1}]_{n=1}^{\infty}$$ (Komatsu, 1999, p. 334).

En esta última notación del número ***e*** se puede observar la falsa periodicidad ya que no todos los cocientes parciales se repiten de la misma forma, se observa entonces un patrón variable.

La genialidad de Euler hace posible la generalización para el caso de raíces enésimas de ***e***.

$$\sqrt[n]{e} = [1\,;n-1\,,1\,,1\,,3n-1\,,1\,,1\,,5n-1\,,1\,,1,\ldots]\,,n\in\mathbb{N}>1$$ (Thakur, 1996, p. 251).

Entonces en un número irracional desarrollado en fracción continua "cuasiperiódica", la emergencia de regularidades y patrones está garantizada, no así la repetitividad de "todos" sus cocientes parciales, si bien se pueden repetir infinitamente algunos de ellos dentro del cuasiperíodo (figura 5).

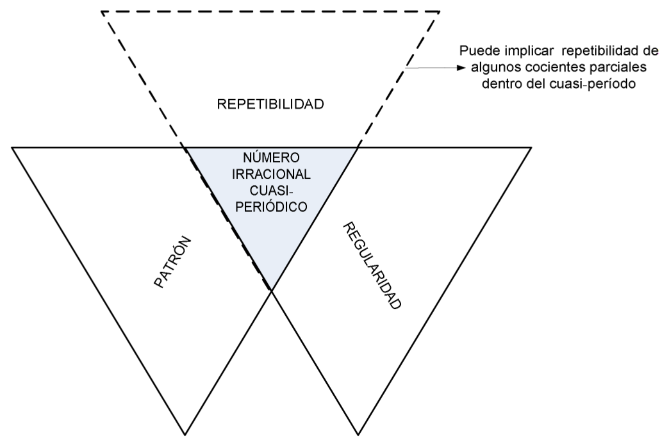


Figura 5. Posibles relaciones de implicancia entre nociones asociadas a la cuasi-periodicidad de un número irracional expresado en fracción continua.
Fuente: Reina, 2016b.

Otros números irracionales, por ejemplo π, no presenta regularidades o patrones expresado en fracción continua simple:

$$\pi = [3\,;7\,,15\,,1\,,292\,,\ldots]$$

Pero sí presenta regularidades y patrones expresado en fracción continua generalizada; es el mismo Euler, en su *Introductio in analys infinitorum,* capítulo XVIII, *De fractionibus continuis*, quien muestra la FC desarrollada por William Brouncker (figura 6).

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2+\ddots}}}}}$$

Figura 6. Fracción continua del número π debida a William Brouncker.
Fuente: Reina, 2010.

De la misma manera que se puede "construir" un número irracional trascendente en expresión decimal por una "ley de formación", también es posible construir (y probar) que algunas fracciones continuas conducen a un número irracional trascendente.

> Tomando como cocientes parciales a_n diferentes secuencias de números conducen a números reales que a menudo resultan trascendentes. Por ejemplo, la fracción continua *s* para los cuales $a_n = n{:}s = [0;1,2,3,4, \ldots] = 0{,}697774657964\ldots$ es trascendente [Wolf, 2010, p. 1].

Entonces aún un número irracional expresado como fracción continua aperiódica puede mostrar cierto tipo de repetitividad o de regularidades y patrones en sus cocientes parciales (figura 7).

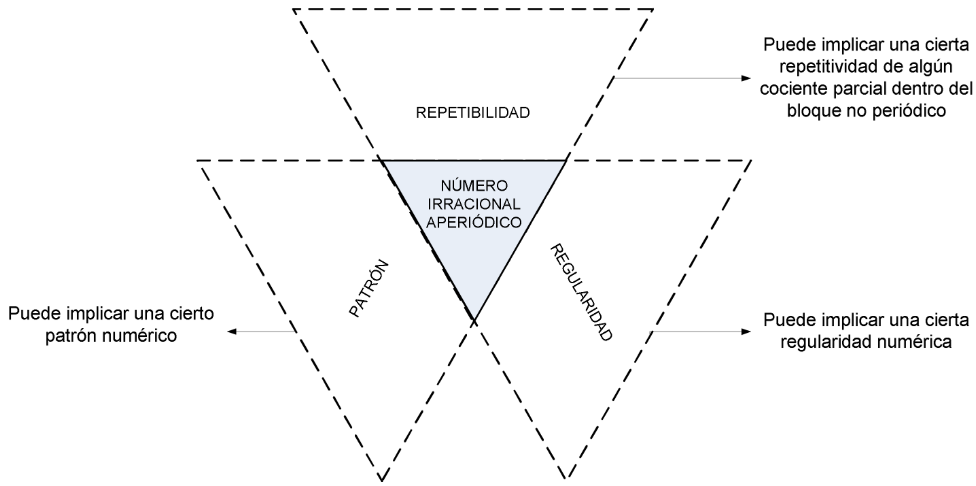


Figura 7. Posibles relaciones de implicancia en las nociones asociadas a la aperiodicidad de un número irracional expresado en fracción continua.
Fuente: Reina, 2016b.

En síntesis, se puede caracterizar los números irracionales, de acuerdo con su escritura, como expresión decimal no periódica infinita o como fracción continua infinita, y esto puede implicar el reconocimiento de relaciones “duales” (figura 8).

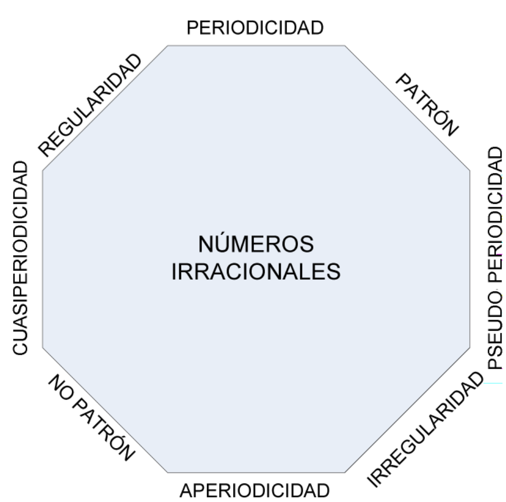


Figura 8. Relaciones matemáticas asociadas a los números irracionales, expresados tanto en desarrollo decimal como en fracción continua.
Fuente: Reina, 2016b.

En el siguiente apartado analizaremos la experiencia llevada adelante en Educación Secundaria.

La puesta en escena del cuestionario

Reina (2016b) analiza la problemática didáctica de las representaciones decimales de números racionales e irracionales en el proceso de la conceptualización de la aperiodicidad numérica en Educación Secundaria.

El estudio muestra las dificultades didácticas, en estudiantes de nivel secundario y superior, al intentar reconocer la racionalidad o irracionalidad de números expresados en forma decimal "sin conocer al número que da origen a la expresión decimal". Por su parte, Reina y Wilhelmi (2017) analizan el fenómeno didáctico de mimetismo ostensivo de objetos matemáticos en el proceso de visualización de la noción de número irracional en Educación Secundaria y en formación docente en Matemáticas.

La estructura del Sistema Educativo Nacional Argentino se establece en el artículo 17 de la Ley 26.206 y comprende cuatro niveles y 8 modalidades:

- La Educación Inicial, la cual constituye una unidad pedagógica y comprende a los/as niños/as desde los cuarenta y cinco días hasta los cinco años inclusive, siendo obligatorio el último año.
- La Educación Primaria, que es obligatoria y constituye una unidad pedagógica y organizativa destinada a la formación de los/as niños/as a partir de los seis años.
- La Educación Secundaria, la cual es obligatoria y constituye una unidad pedagógica y organizativa destinada a lo/as adolescentes y jóvenes que hayan cumplido con el nivel de Educación Primaria. Actualmente coexisten tres estructuras educativas hasta tanto finalice la etapa de transición hacia la implementación de la nueva Ley de Educación Nacional.
- La Educación Superior, la cual comprende:
  a) Universidades e Institutos Universitarios, estatales o privados autorizados, en concordancia con la denominación establecida en la Ley N° 24.521.
  b) Institutos de Educación Superior de jurisdicción nacional, provincial o de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, de gestión estatal o privada [M. E. C. C. y T., 2019].

También en dicho trabajo se analizan la clasificación de números reales por su expresión decimal sin conocer la estructura de origen de dichos números.

En el presente estudio se propone poner en funcionamiento un cuestionario en clase de tercer año (alumnos de 15-16 años) de Educación Secundaria, en donde se presentan números racionales e irracionales, pero en este caso sí se muestran los números que dan origen a las expresiones decimales.

Se trata de cuatro números reales, a saber: $\frac{1}{97}$, $\sqrt{\frac{9}{121}\cdot 100^{5\ 0}+\frac{(112-44\cdot 50)}{121}}$, $\frac{1}{998}$ y $\frac{1}{89999999999999999999999991}$, además se muestran sus respectivos primeros mil decimales.

Para el caso del primer número se puede observar que se trata de un número racional pero el desarrollo de varios decimales genera, en algunos estudiantes, conflicto cognitivo al momento de decidir si se trata de un número irracional o no.

Los resultados obtenidos (tabla 5) muestran que más de la mitad de los alumnos consideró que se trata un número irracional o bien no puede determinarlo. Incluso dos estudiantes señalan que no puede existir un número con esas características.

Número	Irracional	Racional	No puede determinarlo	¿Existirá un número con esas características?		
				Sí	No	No sé
$\frac{1}{97}$	13	13	1	25	2	0

Tabla 5. Identificación de un número racional por su expresión fraccionaria y decimal.
Fuente: Elaboración propia.

Si bien los estudiantes reciben en la tarea dos expresiones del número racional, a saber, fracción y decimal, parece tener más impacto cognitivo la expresión decimal.

Varios de esos alumnos recurren a la "infinitud" del número para "decidir" que es irracional. De hecho, un estudiante hace referencia a la noción de patrón (figura 9). De hecho, está concepción se debe a la regla del *contrato didáctico* (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009), según la cual la racionalidad o irracionalidad "se ve" o "viene dada por su expresión".

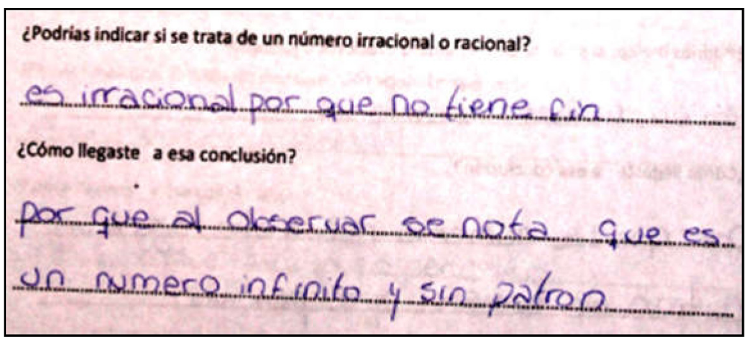

¿Podrías indicar si se trata de un número irracional o racional?
es irracional por que no tiene fin
¿Cómo llegaste a esa conclusión?
por que al observar se nota que es un numero infinito y sin patron

Figura 9. Respuestas de un alumno de tercer año sobre la irracionalidad de un número.

Esta toma de decisiones a favor de la irracionalidad del número, por parte del estudiante, no sólo se ve afectada por cuestiones de contrato didáctico (proceso de estudio) o cognitivas (proceso de visualización) sino por el estado de conceptualización de las nociones de número racional e irracional al momento de llevarse adelante el cuestionario.

Asimismo, las limitaciones de la tecnología también juegan un papel al momento de la toma de decisiones por parte del alumno. En general las calculadoras científicas de bolsillo cuentan con diez a doce dígitos en su pantalla, esta limitación, a pesar de que en el estudio se muestran mil decimales del número, influye en dicha decisión (figura 10).

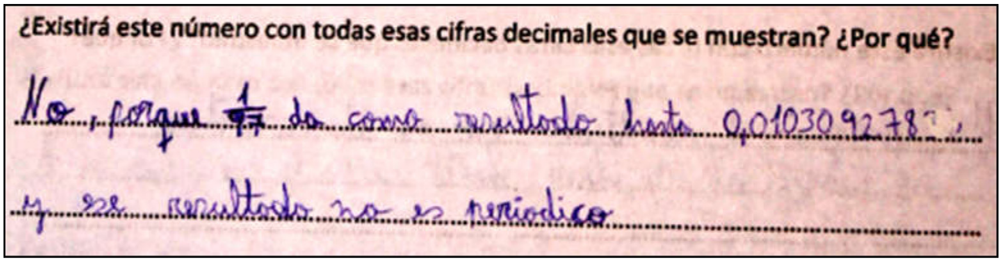


Figura 10. Toma de decisiones de un estudiante sobre la existencia de un número.

Además, el estudiante apela a la noción de periodicidad numérica para indicar que no existe este número, sin embargo, luego, preguntado si se trata de un número racional o irracional, expresa que se trata de un número irracional.

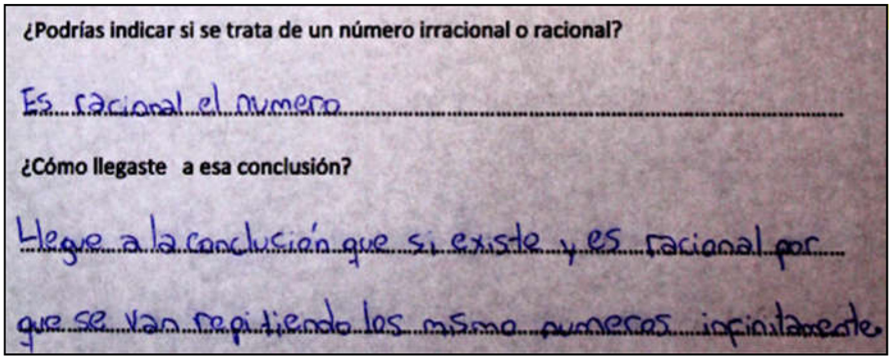
Para el caso del segundo número (tabla 6), este es un número irracional "cebra", si bien hubo una mayor identificación de la aperiodicidad, aún nueve alumnos no la pudieron reconocer; tres estudiantes no creen que exista un número con esas características y dos no saben si puede o no existir.

Número	Irracional	Racional	No puede deter-minarlo	¿Existirá un número con esas características? Sí	No	No sé
$\sqrt{\frac{9}{121}\cdot 100^{5\ 0}+\frac{(112-44\cdot 50)}{121}}$	18	9	0	22	3	2

Tabla 6. Reconocimiento del número irracional cebra $f(50)$.
Fuente. Elaboración propia.

Se debe resaltar que si se intenta emplear la calculadora científica común para verificar la expresión decimal del número irracional cebra $f(50)$, ésta no es posible de obtener ya que aparece el mensaje de "math error". Se trata entonces de una limitación del artefacto tecnológico, no menor, pero que puede subsanarse con el empleo, en el proceso de estudio, de otros artefactos, como la computadora o aplicación para celular.

La periodicidad y la aperiodicidad se mimetizan por ostensión, para el alumno, la aparición de bloques finitos de cifras periódicas es señal de periodicidad infinita (figura 11).


¿Podrías indicar si se trata de un número irracional o racional?

Es racional el numero

¿Cómo llegaste a esa conclusión?

Llegue a la conclusión que si existe y es racional por que se van repitiendo los mismo numeros infinitamente

Figura 11. Respuestas de un alumno sobre
la racionalidad o irracionalidad de un número.

Fuente: Recuperado del trabajo de los alumnos.

Es el número racional $\frac{1}{998}$ (tabla 7) el que mayores conflictos epistémicos causó ya que una gran mayoría de los alumnos no pudo identificar la periodicidad del número.

Número	Irracional	Racional	No puede determinarlo	¿Existirá un número con esas características? Sí	No	No sé
$\frac{1}{998}$	21	5	1	25	0	2

Tabla 7. Identificación del número racional $\frac{1}{998}$ por alumnos de secundaria.

Fuente: Elaboración propia.

Como Reina y Wilhelmi (2017) señalan, se observa un fenómeno de "mimetización ostensiva de objetos matemáticos" por tres posibles cuestiones, a saber:

- *Ecológicas*: relativas al nivel de desarrollo de los contenidos en un nivel educativo de los objetos matemáticos asociados.
- *Cognitivas*: relativas a la complejidad del proceso de visualización ostensiva de un objeto matemático por sus representaciones semióticas y a la "percepción visual" al momento del reconocimiento de patrones y regularidades por parte del estudiante.
- *De contrato didáctico o dimensión normativa*: expectativas mutuas entre profesores y alumnos en relación con el conocimiento.

Para el caso del número racional $\frac{1}{89999999999999999999999991}$ (tabla 8), si bien varios alumnos pueden reconocer la periodicidad del número, aún restan nueve estudiantes que lo consideran irracional, incluso para seis alumnos no puede existir un número con esas características.

Número	Irracional	Racional	No puede determinarlo	¿Existirá un número con esas características?		
				Sí	No	No sé
$\frac{1}{89999999999999999999999991}$	9	16	2	21	6	0

Tabla 8. Identificación del número racional $\frac{1}{89999999999999999999999991}$ por estudiantes de secundaria.

Fuente: Elaboración propia.

Nuevamente emerge en las respuestas de los estudiantes dificultad en el reconocimiento de la racionalidad de un número a pesar de mostrarse su estructura en fracción de números enteros donde la identificación debería darse en forma casi inmediata. Parece primar más una representación por sobre la otra, lo decimal por sobre lo fraccionario.

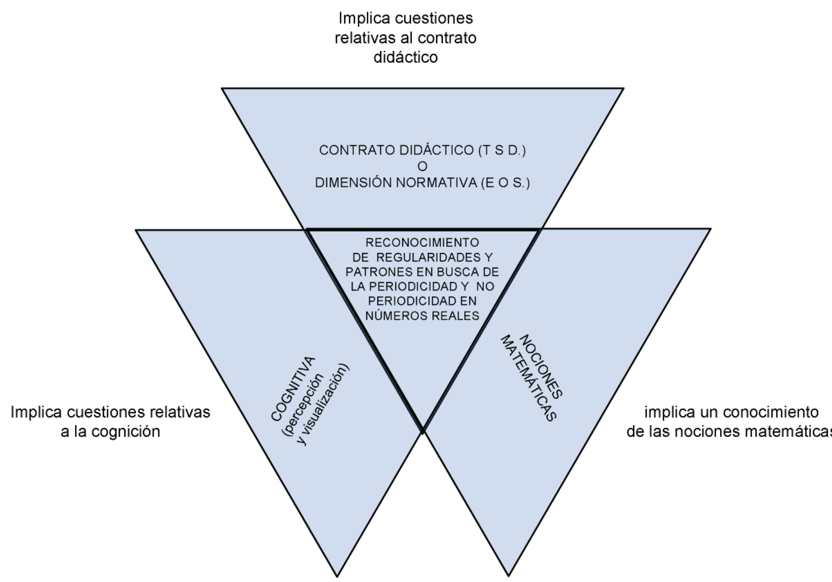


Figura 12. Dificultades relativas al reconocimiento de repeticiones, patrones o regularidades en la búsqueda de una periodicidad y aperiodicidad numérica.

Fuente: Reina, 2016b.

Nuevamente la explicación de este fenómeno de mimetismo ostensivo o didáctico surge de la intersección de cuestiones cognitivas, de contrato didáctico y ecológicas (figura 12).

En este caso parecen sobresalir más las cuestiones de contrato didáctico por sobre las cognitivas y ecológicas:

- Muy arraigado con los años de estudio en los estudiantes, es la expresión decimal, donde dicho desarrollo de un número mostraría su verdadera naturaleza. Los docentes nos vemos implicados en esta cuestión al insistir en una representación por sobre la otra.

- Las limitaciones de las representaciones usadas durante el proceso de estudio de las nociones de número racional e irracional es otra cuestión que también incide fuertemente en el reconocimiento de un número real.
- El uso, durante el proceso de estudio de la noción de número real, de artefactos tecnológicos: calculadora, aplicaciones para el celular, computadora, etc., con sus potencialidades y limitaciones. Como se muestra en algunas respuestas de los estudiantes, dicho uso incide también en la toma de decisiones de los mismos.

La aparente "transparencia" en nociones como las de "repetición", "patrón", "regularidad" y "periodicidad", y el intento de "reconocimiento", por parte de los estudiantes, de la periodicidad y no periodicidad, patrones y no patrones, regularidades e irregularidades y pseudo-periodicidad en las cifras decimales, tanto de números racionales como de números irracionales, llevan a que surjan conflictos semióticos en la construcción de la noción de número irracional.

¿Es posible entonces emplear otra forma de representación en el proceso de estudio de los números reales además de las ya clásicas? El apartado siguiente puede traer luz a esta cuestión.

La fracción continua como herramienta para decidir la racionalidad o la irracionalidad de un número real

Luego de avanzar en la conceptualización del número irracional el docente decide incorporar, a modo de innovación, la noción de fracción continua al proceso de estudio.

Se analizan y estudian algunos números reales desarrollados en fracción continua en notación por cocientes parciales. El profesor intenta la "familiarización" de los estudiantes con el proceso de obtención de dichos cocientes parciales con el fin de lograr el reconocimiento y diferenciación de números racionales e irracionales: los racionales como aquellos en los cuales el proceso de obtención del desarrollo en FC se detiene y los irracionales como aquellos en los que dicho proceso continúa sin fin.

El profesor entrega una lista de números que deben ser clasificados en racionales o irracionales. Los resultados obtenidos se pueden observar en la tabla 9.

Dichos resultados se pueden contemplar dentro de los parámetros de aciertos "esperados".

> Pero existe, inscripto en el contrato didáctico, un 'umbral' bajo el cual la tasa de fracaso será considerada 'satisfactoria', es decir, expresión de la superación antiguo/nuevo [...] La enseñanza de un objeto de enseñanza se termina generalmente mucho antes que la tasa de fracaso haya bajado a cero [Chevallard, 1991, p. 78].

Muy pocos alumnos tienen errores en la mayoría de los números propuestos para la identificación. Sólo un número presenta dificultades, se trata de $\frac{1}{998}$, esta radica en que para que el alumno logre la expresión en fracción continua: $\frac{1}{998} = [0;90,1,2,1,2]$, emplea la calculadora científica, la cual presenta limitaciones que se traducen en errores

Número	Racional	Irracional	No lo sé
$2\sqrt{5}$	1	24	
$\frac{11}{998}$	13	12	
$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	1	24	
$\sqrt{\sqrt{625}}$	25	0	
$\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$	1	21	3
$\sqrt{\frac{289}{324}}$	22	3	
$-\sqrt{196}$	21	4	
$0,\hat{7}$	20	5	
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$	2	23	
$\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$	6	19	
$\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{256}}$	21	4	
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	6	18	1

Tabla 9. Resultados obtenidos en actividad de identificación de un número irracional.
Fuente: Elaboración propia.

de redondeo (0,500000005 en vez de 0,5) que provocan que el estudiante continúe el proceso en vez de detenerse por tratarse de un número racional.

¿Por qué los estudiantes no dicen directamente que $\frac{1}{998}$ es un racional? ¡Es una fracción! El conflicto cognitivo para la identificación de un número irracional ha generado la necesidad de introducir una nueva herramienta, que se concreta en una regla del *contrato didáctico*: "Para saber si es racional o irracional un número se debe determinar su fracción continua". Pero esta regla genera a su vez una "pérdida" de sentido. En cierto sentido, se "sustituye" el conflicto cognitivo por un "obstáculo didáctico", que "opaca" el conocimiento previo de la representación de un número racional: "toda fracción de números enteros (con denominador distinto de cero) es un número racional y todo número racional se puede expresar como fracción de números enteros".

Este error se produce entonces, por un lado, por las limitaciones de los artefactos tecnológicos, y, por otro lado, por cuestiones de contrato didáctico ya que algunos estudiantes quedan "atados" a las representaciones implementadas por el profesor (fracción continua) en detrimento de otras representaciones ya estudiadas (fracción de números enteros).

Nuevamente se ponen de manifiesto restricciones sobre la relación con los objetos matemáticos mediados por sus representaciones (Duval, 2006). Así, la representación no es necesariamente transparente y, por lo tanto, va a precisar información descriptiva adicional en lenguaje verbal o simbólico. Esta información adicional permite la identificación del tipo de número y su clasificación. Con otras palabras, confiere la significación precisa atribuida al número, permitiendo su inteligibilidad en un proceso de estudio.

Resta aún la perspectiva argumentativa en el proceso de reconocimiento de un número irracional, en el apartado siguiente avanzaremos en esa dirección.

Un paso más en el reconocimiento de la irracionalidad: su demostración

Sabemos que, desde la cultura matemática, no basta con reconocer si un número pertenece o no al conjunto de los números irracionales, por algún método, sino que es importante explicar o "demostrar" a qué conjunto numérico pertenece.

La ya clásica demostración de la irracionalidad de raíz cuadrada de dos por reducción al absurdo empleando las nociones de número "par" e "impar" (Courant y Robbins, 1964, pp. 67-68) y otras como la prueba del teorema "si *m* no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{m}$ es un número irracional" (Gaussianos, 2017), muestran algo de esa cultura.

Pero, como Bergé y Sessa (2003) y Bergé (2015) señalan, para el caso de la noción de completitud del conjunto de los números reales, "requiere que se haya instalado en el aula la necesidad de fundamentación, lo cual supone un recorrido anterior, una cierta «madurez matemática», haber salido del plano de lo evidente y un cambio en el tipo de racionalidad" (Bergé, 2015, pp. 193-194).

Pensamos que, para el caso de la demostración de la irracionalidad de un número, en Educación Secundaria, hace falta, siguiendo a Bergé y Sessa, que se haya instalado, en clase de Matemática, una necesidad de fundamentación que en algunos casos resulta algo compleja para este nivel.

Asimismo, en la actualidad, ya existen "motores de respuestas" como Wolfram Alpha (2021), los cuales permiten preguntar si un número es o no irracional y obtener una respuesta (figura 13).

is $\sqrt{\frac{9}{121}\times 100^{50}+\frac{1}{121}(112-44\times 50)}$ an **irrational number?**

Result:

$\sqrt{\frac{9\times 100^{50}}{121}+\frac{1}{121}(112-44\times 50)}$ is an **irrational number**

Figura 13. Pregunta realizada a Wolfram Alpha sobre la irracionalidad de un número real.

Fuente: Wolfram Alpha, 2021.

Cabe preguntarse si es conveniente o no el empleo didáctico de estos motores de respuesta cuando un estudiante de secundaria se encuentra en proceso de conceptualización de la noción de número irracional.

Discusión de resultados sobre la importancia de la fracción continua en la conceptualización de los números racionales e irracionales

La inestabilidad de los conocimientos "previos" se muestra en las respuestas de los alumnos como una constante que incide en las *interacciones dialécticas* (Reina, 2016b; 2017) entre objetos matemáticos asociados a la noción matemática que se está estudiando (figura 14).

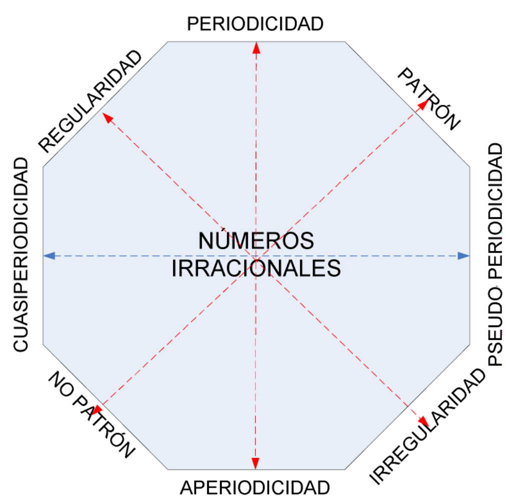


Figura 14. Interacciones didácticas dialécticas entre nociones asociadas a los números irracionales.
Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes tienen dificultades en reconocer la "racionalidad" de un número real que precise el reconocimiento de la repetitividad numérica, el hallazgo de un patrón o de una regularidad numérica (figura 15).

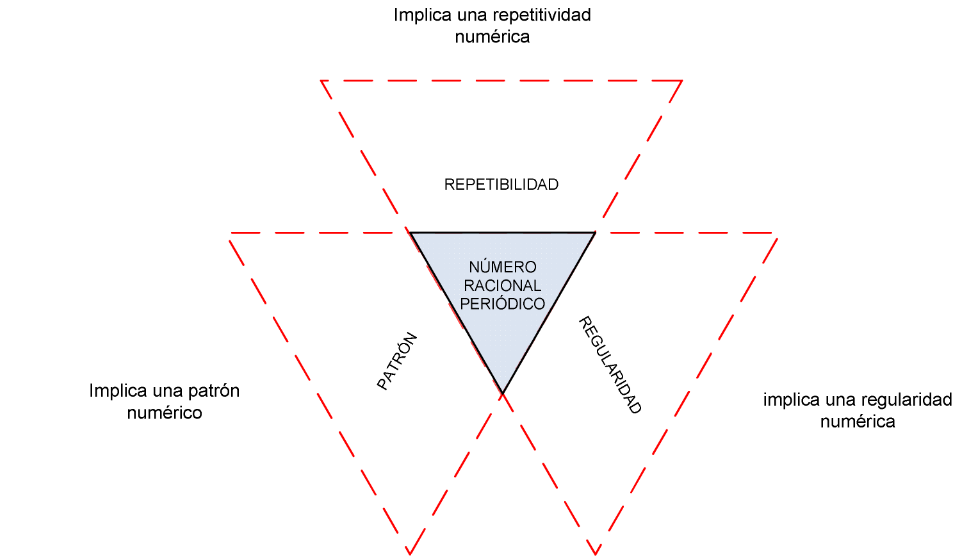


Figura 15. Dificultades asociadas al reconocimiento de los números racionales.
Fuente: Elaboración propia.

Se trata de una dificultad que involucra cuestiones relativas a la cognición, al contrato didáctico o al conocimiento matemático de las nociones implicadas. Entonces lo matemático, lo didáctico y lo cognitivo, en este tipo de actividades se encuentran en estrecha relación (figura 16).

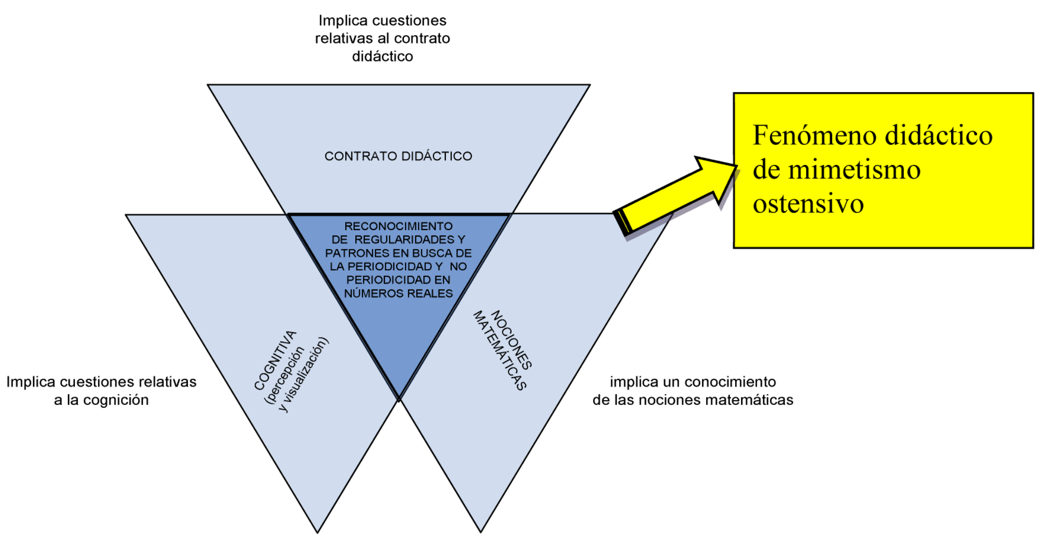


Figura 16. Cuestiones relativas al reconocimiento de patrones y regularidades numéricas en la búsqueda de una periodicidad.
Fuente: Reina, 2016b.

Debemos destacar que el fenómeno de "mimetismo por ostensión" (Reina, 2016b; Reina y Wilhelmi, 2017) se observa, en el caso del reconocimiento de regularidades y patrones en la búsqueda de la periodicidad y de la no-periodicidad numérica, como producto de la "intersección" entre cuestiones de contrato didáctico (relativas a las actividades matemáticas desarrolladas junto al profesor), cuestiones relativas a la cognición (relativas a la percepción y visualización de las representaciones semióticas del objeto) y al estado de conceptualización de las nociones matemáticas "previas".

Para los alumnos resulta muy difícil reconocer la aperiodicidad numérica si previamente no se ha explorado y estudiado la periodicidad. Pero tanto en los números racionales periódicos como en los irracionales la incidencia didáctica del infinito matemático o actual es muy importante a la hora de reconocer y clasificar un número real (Reina, 2016b, p. 116). Esto último plantea serios retos en al aprendizaje de la noción de número irracional en Educación Secundaria.

Por último, la conceptualización del número irracional, dada su complejidad didáctica, no puede alcanzarse en su totalidad hasta avanzados los primeros años de estudios superiores.

Conclusiones y cuestiones abiertas

En relación con las nociones de periodicidad y aperiodicidad numérica se debe tener en cuenta que, si se desea producir esta interacción entre objetos dialécticos, será necesario lograr que los alumnos previamente estabilicen su conceptualización de la propiedad de período de un número racional en su expresión decimal. Se debe considerar que, si se lleva adelante un "reconocimiento" de un número irracional por sus cifras decimales solamente, pueden emerger conflictos semióticos asociados a cuestiones relativas al proceso de visualización de un número real que incluyen cuestiones cognitivas, culturales y sociológicas.

En relación con la noción de número fracción continua: puede ser conveniente su introducción en Educación Secundaria para que los alumnos puedan "diferenciar" números irracionales de racionales por medio de un algoritmo viable y eficaz. Asimismo, se debe tener en cuenta la complejidad didáctica de dicho objeto al momento de producir la interacción.

En relación con la noción de fracción continua: esta noción no aparece en forma explícita en el diseño curricular de la Provincia de Mendoza (DGEPM, 2015), se sugiere tener esta noción presente no solo como un algoritmo que permite diferenciar números irracionales y racionales o aproximar números, sino también como un objeto que permite resolver problemas de máximo común divisor, conocer "familias" de números como los "metálicos" y, además, resolver ecuaciones diofánticas lineales, de Fermat-Pell o incluso problemas de circuitos eléctricos.

Las dificultades observadas no implican que las actividades propuestas carezcan de sentido en Educación Secundaria por al menos dos motivos de naturaleza distinta:

1) Naturaleza de las matemáticas. La complejidad de la actividad que realizan los estudiantes permite en particular introducir la distinción entre representación y objeto, central en todo el desarrollo de las matemáticas. Asimismo, centra

la tarea en la determinación de patrones y, por lo tanto, se está centrando la actividad en la misma esencia de las matemáticas.

2) Desarrollo cognitivo. La adquisición de conocimiento matemático exige, desde el punto de vista cognitivo, el enfrentamiento a tareas lo suficientemente ricas y complejas que comporten dificultades, errores, conflictos (Wilhelmi, 2009). Algunos de ellos podrán ser resueltos en un periodo educativo concreto, otros precisarán de una exposición de los estudiantes continuada.

De esta forma, se precisan estudios que, por un lado, analicen el impacto de este tipo de actividades en relación con la naturaleza misma de las matemáticas; actividades que rompan con ciertos estereotipos y usos en Educación Secundaria que desvirtúan la propia esencia de la disciplina (Lockhart, 2008). Asimismo, por otro lado, es necesario valorar el impacto que estas actividades tienen en etapas sucesivas, tanto en la adquisición de conocimientos matemáticos relacionados directamente con el tópico de los conjuntos numéricos como en el desarrollo de otros ámbitos matemáticos por el influjo en la conceptualización de la naturaleza de las matemáticas.

Referencias

Bergé, A. (2015). Estudio didáctico de la completitud del conjunto de los números reales [videoconferencia]. *Seminario Repensar las Matemáticas N° 75*. México: Instituto Politécnico Nacional. Recuperado de: https://repensarlasmatematicas.wordpress.com/otros-ciclos/10ciclo/sesion-s75/s75video/ (consulta: 19 abr. 2019).

Bergé, A., y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Relime. Revista Latinoamericana de Investigaciónen Matemática Educativa*, *6*(3), 163-197. Recuperado de: www.redalyc.org/pdf/335/33560301.pdf (consulta: 14 abr. 2019).

Carraher, D. W., Martinez, M. V., y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM MathematicsEducation*, *40*(1), 3-22. doi:10.1007/s11858-007-0067-7. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/227057183_Early_algebra_and_mathematical_generalization(consulta: 28 jul. 2019).

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales* (pp. 33-34). Granada: Comares.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (2a. ed.). Buenos Aires: Aique.

Chorny, F., Salpeter, C., y Krimker, G. (2009). *Matemática 2/3* (2a. ed.). Buenos Aires: SM.

Courant, R., y Robbins, H. (1964). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Madrid: Aguilar.

DGEPM [Dirección General de Escuelas de la Provincia de Mendoza] (2015). *Diseño curricular provincial. Sector: Electricidad*. Mendoza: Autor.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Gaussianos (2017, ago. 3). *La raíz de un entero (no cuadrado) es irracional*. Recuperado de: https://www.gaussianos.com/la-raiz-de-un-entero-no-cuadrado-es-irracional/.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. R., y De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59-76. Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/132207(recuperado 28 de julio de 2019).

Hardy, G. H. (2005). *A mathematician's apology*. Recuperado de: https://www.math.ualberta.ca/mss/misc/ (consulta: 28 jul. 2019).

Komatsu, T. (1999). On inhomogeneous diophantine approximation with some quasi-periodic expressions, II. *Journal de Théorie Des Nombres de Bordeaux*, *2*(11), 331-334. Recuperado de: http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1999__11_2_331_0 (consulta: 31 may. 2019).

Lockhart, P. (2008). El lamento de un matemático. *La Gaceta de la RSME*, *11*(4), 739-766. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/8476/1/Lockhart2008El.pdf (consulta: 28 jul. 2019).

M. E. C. C. y T. [Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología] (2019). Estructura del sistema educativo: niveles y modalidades. Recuperado de: https://www.argentina.gob.ar/educacion/validez-titulos/glosario/estructura-sistema (consulta: 3 nov. 2019).

Pickover, C. A. (2007). *Las matemáticas de Oz*. España: RBA Coleccionables.

Project Maxima (s.f.). *Maxima, a Computer Algebra System*. Recuperado de: https://maxima.sourceforge.io/.

Reina, L. (2010). La fracción continua y el número irracional. Puntos de encuentro y algunos aportes didácticos. *Encuentro Latinoamericano de Profesores y Estudiantes de Matemática y Ciencias Naturales*. San Rafael, Mendoza, Argentina: IES "Del Atuel".

Reina, L. (2016a). Construcción de la noción de número irracional en Educación Secundaria: algunos conflictos y dificultades asociados a su enseñanza. *Seminario Repensar las Matemáticas N° 89* [videoconferencia]. México: Instituto Politécnico Nacional. Recuperado de: https://repensarlasmatematicas.wordpress.com/otros-ciclos/11ciclo/sesion-s89/ (consulta: 3 nov. 2019).

Reina, L. (2016b). *Simbiosis didáctica curricular entre el número irracional y la fracción continua en Educación Secundaria: restricciones, interacciones e idoneidad* [Tesis de Doctoral]. Universidad Nacional de Cuyo, Argentina. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_LReina.pdf (consulta: 28 jul. 2019).

Reina, L. (2018). Simbiosis didáctica curricular entre el número irracional y la fracción continua en Educación Secundaria: restricciones, interacciones e idoneidad. En I. Morchio (coord.), H. Difabio, R. Marsollier y G. Boarini, *Tesis doctorales. Aportes a la investigación desde el Doctorado en Ciencias de la Educación*. Mendoza: Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Nacional de Cuyo. Recuperado de: http://bdigital.uncu.edu.ar/11210 (consulta: 28 jul. 2019).

Reina, L., y Wilhelmi, M. R. (2017). Mimetismo ostensivo de objetos matemáticos. El caso de los números irracionales. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López Martín (eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/reina_wilhelmi.pdf.

Rey, J., Pi, P., y Trejo, C. (1969). *Análisis matemático* (vol. 1, 8a. ed.). Buenos Aires: Kapeluz.

Spinadel, V. W. de (1995). *La familia de los números metálicos y el diseño*. Centro MAyDI de la Fac. de Arquitectura, Diseño y Urbanismo, Universidad de Buenos Aires. Recuperado de: http://cumincades.scix.net/data/works/att/4856.content.pdf (consulta: 31 may. 2019).

Spinadel, V. W. de (2003). *La familia de números metálicos* [Cuadernos del CIMBAGE N° 6]. Centro de Matemática y Diseño MAyDI, Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo, Universidad de Buenos Aires.

Thakur, D. S. (1996). Exponential and continued fractions. *Journal of NumberTheory*, *59*(97), 248-261. Recuperado de: https://web.math.rochester.edu/people/faculty/dthakur2/cf2.pdf (consulta: 28 jul. 2019).

Wilhelmi, M. R. (2009). Didáctica de las matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico. En C. Gaita (coord.), *Enseñanza de las matemáticas IV* (pp. 1-22). Lima: IREM/ Pontificia Universidad Católica del Perú. Recuperado de: http://irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2011/10/actas_2009_iv_coloquio.pdf.

Wolf, M. (2010). Continued fractions constructed from prime numbers. *arXiv:1003.4015v2 [mathNT]*, 1-35. Recuperado de: https://arxiv.org/pdf/1003.4015.pdf.

Wolfram Alpha (2021). *Wolfram Alpha computational intelligence*. Recuperado de: https://www.wolframalpha.com/.

wxMaxima (s.f.). *wxMaxima*. Recuperado de: https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/.