Recursos utilizados por el profesor de telebachillerato para enseñar álgebra: productos notables

Resources used by of the telebachillerato teacher to teach algebra: notable products

David-Alfonso Páez[1]
Teresa de Jesús Cañedo Ortiz[2]
Daniel Eudave Muñoz[3]

Resumen

En este documento planteamos como objeto describir cómo el profesor de Telebachillerato utiliza los recursos para enseñar productos notables. Retomamos la discusión sobre el concepto de recurso y su relación con la práctica docente en matemáticas. En el presente documento se reporta un profesor de Telebachillerato, como estudio de caso a profundidad, centrado en la enseñanza de Productos notables. El docente fue observado (videograbación) en dos sesiones de clases con el propósito de, posteriormente, generar una reflexión sobre la utilización que le da a los recursos en matemáticas y sobre su impacto en el aprendizaje. Los resultados muestran que éste utiliza el libro de texto y diapositivas previamente seleccionadas y estudiadas. La interacción que tiene el profesor con los recursos disponibles refleja un interés por generar un

[1] David Alfonso Páez. Catedrático CONACyT incorporado a la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México. Es doctor en ciencias con la especialidad en matemática educativa. Correo electrónico: dapaez@correo.uaa.mx
ID: http://orcid.org/0000-0002-4499-4452

[2] Teresa de Jesús Cañedo Ortiz. Profesora de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México. UAA, Departamento de Educación. Colaborador en varias investigaciones. Correo electrónico: tjcanedo@correo.uaa.mx
ID: http://orcid.org/0000-0002-4555-9321

[3] Daniel Eudave Muñoz. Profesor-investigador de tiempo completo del Departamento de Educación de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, México. Doctor en Educación. Correo electrónico: deudave@correo.uaa.mx
ID: http://orcid.org/0000-0003-4070-3109

aprendizaje matemático, sin embargo existen vacios entre la práctica del profesor y los recursos disponibles, lo cual dificulta una compresión de lo que son productos notables.

Palabras clave
Educación media superior, práctica docente, recursos didácticos, enseñanza de las matemáticas, álgebra.

Abstract
In this paper we propose as an object describe how the Telebachillerato teacher uses resources to teach notable products. We start from the discussion on the concept of resource and its relationship to the teaching practice in mathematics. In the document we report a Telebachillerato teacher as a case study, focused on the teaching of notable products. The teacher was observed (videotaped) in two sessions of classes with the purpose of subsequently generating a reflection on the use that he gives to these resources in mathematics and its impact on learning. The results show that this used book text and slides previously selected and studied. The interaction that has the teacher with available resources reflects an interest in generating a mathematical learning, however there are gaps between the practice of the teacher and the resources available, which makes it difficult to understand what are notable products.

Keywords
Higher secondary education, teaching practice, didactic resources, teaching mathematics, algebra.

Introducción

La enseñanza de las matemáticas requiere de profesores que tengan una compresión profunda del conocimiento matemático que se espera aprendan los estudiantes (NCTM, 2014), y que además estos profesores tengan habilidades para lograr una enseñanza más efectiva en el desarrollo de ese aprendizaje (NCTM, 2014). Lo anterior plantea retos para los docentes que imparten matemáticas en Telebachillerato (TB) de México, pues la mayor parte de ellos cuentan con un perfil ajeno a las matemáticas o a la pedagogía (INEE, 2015), y tienen la responsabilidad de “organiza[r] ambientes de aprendizaje a partir de los cuales los estudiantes pueden estructurar nuevos saberes y desarrollar habilidades” (SEMS, 2015, p. 14).

Como parte de las habilidades que debe tener el docente de TB es seleccionar y disponer de recursos para enseñar matemáticas (Adler, 2000). Al respecto, Gueudet y Trouche (2009, 2010) mencionan que el profesor, como parte de su quehacer, "busca recursos, selecciona/diseña tareas matemáticas, administra los recursos disponibles, etc." (2009, p. 199), de modo que éstos sean "trabajados (adaptados, revisados, reorganizados…) [para enseñar matemáticas]" (2010, p. 58). Los recursos hacen referencia a los materiales usados en la práctica docente; por ejemplo, libro de texto, pizarrón, escuadras, calculadora, entre otros (Adler, 2000). La falta de recursos, en general, es pensada como la ausencia de esos materiales u otros utilizados en matemáticas. En TB, el profesor cuenta con una variedad de materiales; por ejemplo, el libro de texto oficial, vídeos educativos y guías didácticas (INEE, 2015). En la actualidad, estos recursos son fundamentales en la práctica del profesor de TB, pues le proporcionan actividades y la argumentación matemática necesaria –información conceptual y procedimental– en torno al contenido a enseñar, además, orienta al docente sobre lo que tiene que enseñar y cómo lo deben hacer (Weiss, 2017); sin embargo, la manera de cómo estos u otros recursos sean utilizados pueden "facilitar u obstaculizar el acceso al conocimiento matemático" (Adler, 2000, p. 214).

Aun cuando los recursos de TB están diseñados para guiar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la mayoría de las veces el profesor los tiene que adaptar a las condiciones de sus alumnos y del salón de clases (INEE, 2015). Asimismo, el profesor de TB se apoya en sus propios recursos, tales como libros de texto de otros subsistemas, internet, impresiones, entre otros (Weiss, 2017). La adaptación, disposición o falta de recursos está en función de la experiencia del profesor y de la actualización de los programas de matemáticas. Chevallard y Cirade (2010) argumentan que "la falta de recursos puede surgir en la profesión cuando es propuesto un nuevo programa que contiene […] matemáticas no enseñadas hasta el momento o cuando se introducen nuevos enfoques" (p. 46).

En México se requieren estudios sobre el profesor de instituciones vulnerables, como los TB, que abonen a comprender la práctica docente en el contexto de las matemáticas, en particular, estudiar cómo implementa sus recursos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En relación con ello, un contenido fundamental para el pensamiento algebraico en EMS son los productos notables. Lo anterior lleva a plantear como objetivo describir cómo el profesor de TB utiliza los recursos disponibles para enseñar productos notables.

Marco teórico

Para estudiar la práctica docente, Adler (2000) y Gueudet y Trouche (2009, 2010) centran su atención en los recursos que usa el profesor para enseñar matemáticas. En educación matemática, el uso común que se le da a la palabra recurso es el referido a los materiales utilizados en la práctica docente, sin embargo Adler (2000) menciona que también puede estar asociada con el verbo re-source, cuyo significado es: "volver al origen [fuente], pero de otra forma" (p. 207). Gueudet y Trouche (2010) afirman que: "la funcionalidad de un recurso en y para la enseñanza de las matemáticas reside en su uso, más que en su simple presencia" (p. 23).

Los recursos son parte fundamental de la práctica docente al ser un apoyo para enseñar o facilitar el aprendizaje de las matemáticas (Adler, 2000). La interacción que el profesor tiene con los recursos disponibles se da a través de una génesis, llamada, documental (Gueudet, & Trouche, 2009, 2010), en la cual el usuario se apropia de los recursos disponibles y, su vez, construye esquemas de utilización. En este sentido, la génesis documental, en términos de Rabardel (1995), es un proceso bidireccional: involucra una instrumentalización y una instrumentación de los recursos. La instrumentalización se refiere a la apropiación o dominio que tiene el profesor sobre los recursos y la instrumentación es la influencia de éstos sobre la práctica docente y el conocimiento del profesor (Gueudet, & Trouche, 2009, 2010). Los esquemas de utilización son reglas de acción e invariantes operatorios (i.e., conocimientos susceptibles de intervenir en la práctica del profesor), para Gueudet y Trouche (2009) se refieren a: "fuerzas impulsoras y resultados de la actividad del profesor" (p. 205).

Metodología

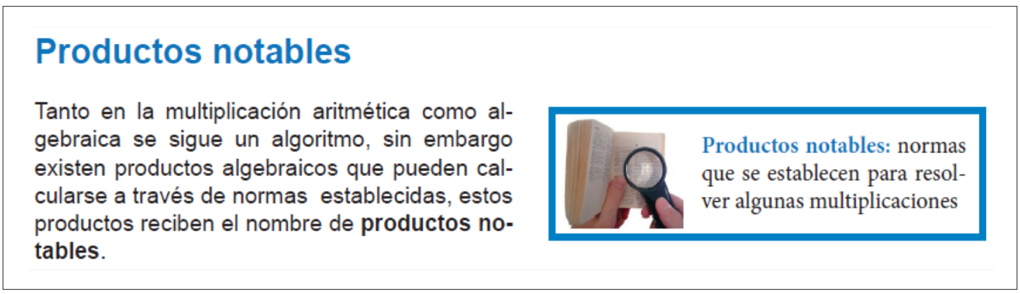
El estudio aquí reportado es de carácter exploratorio sobre la práctica docente como un fenómeno social que ocurre en un momento dado (Schoenfeld, 2007), además, pertenece a un proyecto de investigación más amplío centrado en la reflexión de la práctica docente en matemáticas. En el presente documento se reporta la práctica de un solo profesor de TB como un estudio a profundidad. Como parte de la metodología del proyecto, el profesor, a quien hemos llamado Carlos, fue videograbado impartiendo matemáticas en dos sesiones de clases de primer semestre de TB; para ello, Carlos determinó el contenido matemáticas a trabajar en esas sesiones, así como las fechas de observación. El propósito de las observaciones fue tener una aproximación puntual de la actividad que ocurre en el salón de clases en contextos desfavorables, tomando como referente los recursos disponibles por el profesor y, principalmente, el uso que estos tienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las videograbaciones se llevaron a cabo tratando de afectar en lo más mínimo el escenario y el contexto natural donde se da el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Stake, 1999).

Análisis de datos

Carlos se apoya en el libro de texto (Garrido, Llamas, & Sánchez, 2015) y en un conjunto de diapositivas (imágenes proyectas en el pizarrón) como los principales recursos previamente revisados o diseñados para enseñar productos notables. Aunque estos recursos son los que sobresalen en las clases observadas, el libro de texto solo aparece como un material de consulta.

En el libro de texto, los Productos notables están dados de dos maneras: como productos que se obtienen de reglas definidas y como reglas relacionadas con el algoritmo de la multiplicación, el cual involucra dos o más binomios con expresiones algebraicas particulares (Figura 1). La definición muestra que no todo producto algebraico es notable, sino solo aquellos que siguen una de las siguientes reglas en la multiplicación de sus binomios (Garrido et al., 2015, pp. 184-187):

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a+3)(a+1) = a^2 \cdot a \cdot 1 \cdot +3 \cdot a + 3 \cdot 1 = a^2 + (1+3) + 3 = a^2 + 4a + 3$;
3. $(x+2)(x-2) = x^2 + 2x - 2x - 4 = x^2 - 4$;
4. $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + a^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + a^2b + b^3$.



Productos notables

Tanto en la multiplicación aritmética como algebraica se sigue un algoritmo, sin embargo existen productos algebraicos que pueden calcularse a través de normas establecidas, estos productos reciben el nombre de **productos notables**.

Productos notables: normas que se establecen para resolver algunas multiplicaciones

Figura 1. Definición de Productos notables en el Libro de texto de TB (Garrido et al., 2015, p. 183).

Lo anterior plantea cuatro Productos notables: binomio al cuadrado, con un término común, conjugado y al cubo. De modo que para cada producto siempre se sigue la misma regla: multiplicar dos o tres binomios entre sí, de término a término. Además, para una mayor argumentación, el libro de texto le proporciona al profesor demostraciones algébricas y gráficas de cómo se obtiene estos productos al efectuar el algoritmo de la multiplicación, también le proporciona la regla implementada en un lenguaje verbal (cfr. Garrido et al., 2015, pp. 184-187). Al tener el procedimiento de manera detallada, al profesor le permite dar cuenta de cómo se obtuvo el producto y justificar a través del procedimiento o de los gráficos de por qué funciona de esa manera la multiplicación con polinomios particulares y por qué con ese tipo de binomios se obtiene tales productos, de modo que se deduzca una regla en cada relación de binomios; por ejemplo, "El binomio con un término en común, es el cuadrado del término común, más la suma de los dos términos distintos multiplicados por el término común, más el producto de los términos distintos" (p. 184).

En comparación con el libro de texto, las diapositivas (imágenes proyectas en el pizarrón) son el recurso fundamental en la clase de Carlos, en ellas se apoya para desarrollar una compresión del concepto de productos notables y cómo obtener cada producto notable. En general, las diapositivas contienen la definición y tipos de productos notables con su correspondiente regla implementada, así como algunos ejercicios.

Las diapositivas proporcionan una definición general y diferente a la del libro de texto (Figura 2), lo cual podría generar obstáculos en lo que es o no un producto notable. La definición dada en las diapositivas muestra que todo producto podría ser notable, al considerar que éste solo es una multiplicación de expresiones algebraicas. Se deja de lado el uso de reglas relacionadas con la multiplicación o el tipo de expresiones algebraicas; en todo caso, al profesor le corresponde explicitarlo.

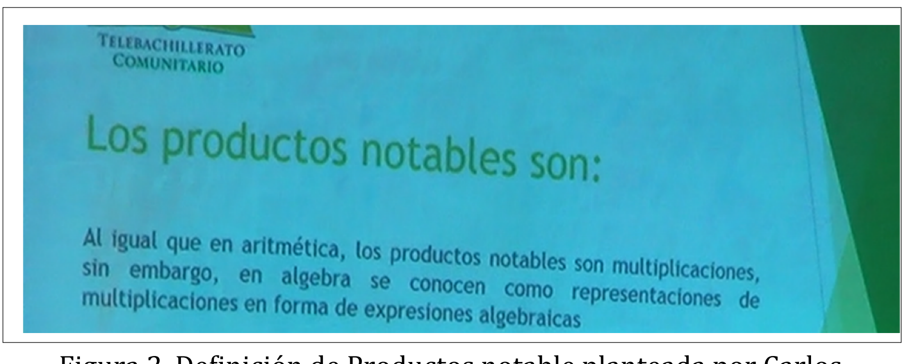


Figura 2. Definición de Productos notable planteada por Carlos.

Al interaccionar con esta definición, y de acuerdo con sus esquemas de utilización, Carlos hace su propia interpretación acerca de qué son productos notables. Él relaciona los productos notables con la multiplicación de polinomios, sin explicitar de qué tipo, y con la o las literales (variables) involucradas en los polinomios; para Carlos, los productos notables vienen de la multiplicación de polinomios y se caracterizan por usar "letras" en comparación con el contexto de aritmética, en el cual solo se usan números. Los esquemas de Carlos hacen referencia a una falta de conocimiento básico en álgebra:

Carlos: Es prácticamente multiplicación de polinomios, pero hay una variante en este tema. Ya saben que un producto es el resultado de una multiplicación. Existen multiplicaciones de términos algebraicos llamados productos notables […].Vamos a ver qué características tienen. Ya habían visto que las multiplicaciones algebraicas son operaciones aritméticas normales, simplemente que las expresiones algebraicas manejamos algo diferente, ¿qué Karen?

Karen: Los números por letras.

Carlos: Los número cambian por letras. ¿Cómo se llaman las letras? […] Variables o letras. Los productos notables son operaciones […] pero con letras.

Carlos hace un recordatorio de los tipos de polinomios, lo cual muestra que los estudiantes tienen un conocimiento sobre estos: "Acuérdenme cuántas expresiones algebraicas podemos encontrar…, dependiendo de su número de términos; por ejemplo, las expresiones algebraicas con un término, ¿cómo se llaman? […] Monomios. Las expresiones con dos términos […], binomios. Tres términos, […] trinomios. Las expresiones de cuatro en adelante, […] polinomios". Da por hecho que los binomios tienen relación con los Productos notables al considerar que hay cuatro tipos de estos, lo cual coincide con su libro de texto: binomio al cuadrado, con un término común, conjugado y al cubo. Además más que recurrir a la expresión general de cada producto notable, propone un ejemplo: $(2x + 3)^2$, $(x + 4)(x - 1)$, $(x + 2)(x - 2)$ y $(2x + 3)^3$. Llama la atención que en las diapositivas muestra el resultado general ("Forma general") que se obtiene de cada producto, aunque no lo retoma (e.g., Figura 3).

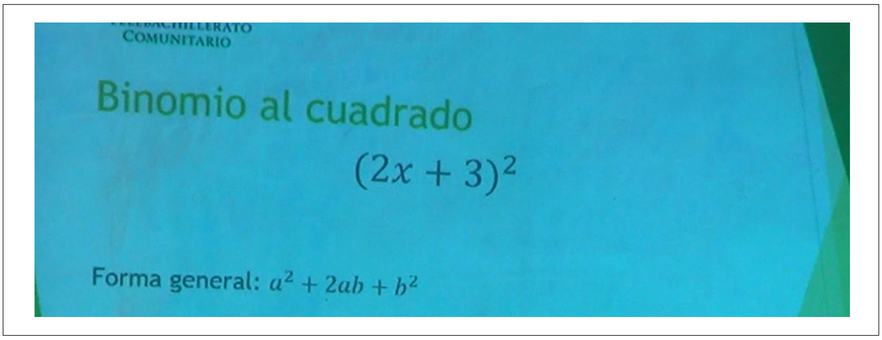


Figura 3. Binomio al cuadrado como producto notable.

Los invariantes operatorios de Carlos están relacionados con explicar las características de la estructura de cada producto notable y generar la multiplicación, más que argumentar y demostrar por qué tal expresión algebraica es un producto notable o qué regla hay inmersa al implementar el algoritmo de la multiplicación. Un ejemplo de ellos, es cuando Carlos trabaja el Binomio al cuadrado:

Carlos: ¿Qué características ven en ese binomio al cuadrado? […]

Alumnos: Tiene un exponente.

Carlos: Tiene un exponente. ¿Qué significa que esté afuera de los paréntesis? Que se eleva a la potencia de dos. Es un dos afuera de los paréntesis. Si se fijan el binomio al cuadrado no tiene el exponente en el término 2x ni tiene el exponente 3 en el término 3, lo tiene fuera de los paréntesis, lo que me indica que estamos elevando al cuadrado todos los términos. Esas son las características de un binomio al cuadrado: […] es un binomio que se eleva a la potencia.

Aunque Carlos al final de su discurso determina que un binomio al cuadro es un binomio elevado a la potencia de dos, lo cual muestra algunos errores matemáticos que llevan a confundir a los estudiantes. En relación con la ubicación del exponente/potencia, Carlos determina que un binomio está elevado al cuadrado por la ubicación del exponente, sin embargo, su explicación muestra que los términos del binomio no podrían tener exponentes o, a sus vez, tener una potencia mayor o igual que 2.

En el discurso de Carlos es evidente que hace referencia desarrollar la multiplicación para llevar al producto notable: “Ahora sí, viene lo difícil del ejercicio. Lo primero que vamos a solucionar es el binomio al cuadrado. En este caso no es muy diferente a la multiplicación de polinomios como lo veníamos haciendo. […] El binomio al cuadrado me está indicando que necesito elevar $2x + 3$ a la potencia de dos que me representa la siguiente manera". Los esquemas de utilización que posee Carlos sobre el ejemplo expuesto del binomio al cuadrado se relacionan con la multiplicación de polinomios. Él parte de operar este tipo de expresiones mediante el algoritmo de la multiplicación para darle sentido al producto del binomio al cuadrado. Aunque Carlos usa la regla, no la explicita ni reflexiona sobre ella para demostrar por qué algunos productos son notables. El uso de las diapositivas están centradas en mostrar el algoritmo de la multiplicación para solucionar cada producto; como dice Carlos: "vamos a solucionar [por ejemplo] el binomio al cuadrado".

Conclusiones

La manera en cómo el profesor Carlos utiliza sus recursos en la enseñanza de Productos notables inciden en la experiencia de resolución de problemas por parte del estudiante, de modo que se podrían generar obstáculos; por ejemplo, considerar que todo polinomio multiplicado por otro es un producto notables. El uso que Carlos le da a los recursos disponibles está determinado por el conocimiento y creencias que tiene sobre la matemática y sobre cómo se debe enseñar. Existe una falta de conocimiento matemático y didáctico en el profesor, de modo que el uso que le da a los recursos disponibles lo lleva a errores matemáticos. Aunque el libro de texto de TB está diseñado para que sea un apoyo adecuado para la enseñanza de las matemáticas, Carlos propone su propio recurso. Hay un esfuerzo por el profesor de enseñar productos notables, sin embargo se observó que entre los recursos disponibles hay "vacíos matemáticos" (Guzmán, & Kieran, 2013), los cuales dificultan una compresión de lo que son productos notables a través de su relación con la multiplicación y bajo un conjunto de reglas en el contexto del álgebra.

Referencias

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. Journal of Mathematics Teacher Education, 3, 205-224. ISSN: 1386-4416.

Chevallard, Y., & Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problem professionnel. En G. Gueudet, & L. Trouche (Eds.), Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques (pp. 41-55). Lyon: Universitaires de Rennes.

Garrido, M., Llamas, L. C., & Sánchez, I. (2015). Matemáticas I. DF: SEP. Disponible en https://www.dgb.sep.gob.mx/servicioseducativos/telebachillerato/LIBROS/1-semestre-2016/Matematicas-I.pdf

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? Educational Studies in Mathematics, 71, 199-218. doi: 10.1007/s10649-008-9159-8.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents travail du professeur et genèses documentaires. En G. Gueudet, & L. Trouche (Eds.), Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques (pp. 57-74). Lyon: Presses Universitaires de Rennes.

Guzmán, J., & Kieran, C. (2013). Becoming aware of mathematical gaps in new curricular materials: a resource-based analysis of teaching practice. The Mathematics Enthusiast, 10(1,2), 163-190. ISSN: 1551-3440.

Instituto Nacional de Evaluación para la Educación (INEE). (2015). Los docentes en México. Informe 2015. México, DF: INEE. Disponible en publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/I/240/P1I240.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All. Estado Unidos de América: NCTM.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains. Francia: Armand Colin.

Schoenfeld, A. (2007). Method. En F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on the mathematics teaching and learning (pp. 69-109). USA: Information Age.

Stake, R. E. (1999). Investigación con estudio de casos. Madrid, España: Morata.

Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS). (2015). Documento base. Telebachillerato Comunitario. México: SEMS.

Weiss H., E. (2017). Estudio exploratorio del Modelo de Telebachillerato Comunitario y su operación en los estados. México: INEE.