REDIECH
Red de Investigadores Educativos
CHIHUAHUA

ISSN: 2007-4336

ie revista de investigación educativa de la Rediech

año 8 • número 15
octubre 2017 - marzo 2018

Aprender y enseñar matemáticas: desafío de la educación

Índice

Revista indizada en:

- Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, El Caribe, España y Portugal (Latindex).
- Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa (IRESIE).
- Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades (CLASE).
- Scientific Electronic Library Online (SciELO México).
- Red de Revistas Científicas de América Latina y El Caribe, España y Portugal (REDALyC)
- Directory of Open Access Journals (DOAJ).
- Red Latinoamericana de Revistas en Ciencias Sociales (LatinREV).
- Fundación Dialnet / Universidad de La Rioja

IE REVISTA DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA DE LA REDIECH (año 8, n. 15, octubre 2017-marzo 2018) es una publicación semestral editada por la Red de Investigadores Educativos Chihuahua AC (Efrén Ornelas 1406, col. Obrera, Chihuahua, Chihuahua, México, CP 31350, http://www.rediech.org/ojs/2017, revista@rediech.org). Editor responsable: Jesús Adolfo Trujillo Holguín. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2017-032919000300-102, ISSN (versión impresa): 2007-4336, ISSN (versión electrónica): 2448-8550, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número: Red de Investigadores Educativos Chihuahua AC, Alba Jyassu Ogaz Vásquez (Efrén Ornelas 1406, col. Obrera, Chihuahua, Chih., México, CP 31350. Fecha de última modificación: octubre de 2017.

Corrección de textos, diseño editorial y producción a cargo de Doble Hélice Ediciones.

[Editorial]

Redes académicas, difusión del conocimiento y matemáticas en educación

La editorial para este número especial de *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech* parte de tres consideraciones que se enuncian en el título y que guardan una estrecha relación con el trabajo que realiza la comunidad académica reunida en torno a la Red de Investigadores Educativos Chihuahua (Rediech).

Redes académicas. Este trabajo es resultado de una convocatoria temática a cargo de la Dra. Bertha Ivonne Sánchez Luján –presidenta de la Rediech– y su propósito central es el análisis profundo sobre el tema *Aprender y enseñar matemáticas: desafío de la educación*, dado que representa uno de los retos más importantes para el sistema educativo nacional.

La propuesta de coordinación surge al interior del Comité Editorial de la revista, con la intención de abrir espacios de participación horizontal entre sus integrantes y, a la vez, atender necesidades específicas de comunidades académicas bien consolidadas, como son las que se especializan en el tema de la matemática educativa en México y Latinoamérica.

Entre las tareas asumidas por la Dra. Sánchez Luján se encuentran las de elaborar las bases para la convocatoria, identificar las redes y grupos académicos potencialmente interesados, seleccionar a los dictaminadores, así como promover la participación de especialistas en el tema, investigadores, estudiantes de posgrado y docentes –nacionales y extranjeros– dispuestos a presentar artículos de investigación originales e inéditos que dieran cuenta de la discusión actual en el área.

La capacidad de convocatoria para este número fue amplia, pues en un periodo relativamente corto se recibieron 14 propuestas, de las cuales –luego de pasar por los dos procesos de evaluación que establece la norma editorial de la revista– fueron seleccionadas 8; esto es, un porcentaje de aceptación del 57%. En las tareas de evaluación se involucraron 14 integrantes del Comité Editorial para la primera lectura de trabajos y 26 pares académicos, especialistas en el tema, que dieron el veredicto final. En esta última fase resultan sumamente importantes los comentarios y recomendaciones que los dictaminadores realizan a los autores, dado que posibilitan el aprendizaje colectivo.

El lanzamiento de una convocatoria temática para un número especial es algo que no se había dado antes en esta revista, lo cual sienta un precedente importante y alienta a seguir generando espacios en los cuales los investigadores puedan converger en una temática que posibilite la generación de conocimiento a nivel especializado. Al mismo tiempo contribuye a posicionar esta publicación en el ámbito académico nacional e internacional, tanto en la participación de los autores como de los dictaminadores. En este ocasión –por ejemplo– de los 26 árbitros, 6 pertenecen a diferentes instituciones del estado de Chihuahua (Jiménez, Saucillo, Chihuahua y Ciudad Juárez), 20 a entidades de la República Mexicana (Chiapas, Sonora, Campeche, Tamaulipas, Ciudad de México, Nayarit, Sinaloa, Zacatecas, Baja California, Durango y Querétaro) y 5 de países latinoamericanos (Colombia, Perú y Costa Rica).

Por otra parte, la presencia de las redes académicas fue una constante a lo largo del proceso. La difusión de la convocatoria penetró al interior del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, la Sociedad Matemática Mexicana, la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa, el Consejo Mexicano de Investigación Educativa y la propia Red de Investigadores Educativos Chihuahua. Seguramente hubo otros espacios de coincidencia a nivel institucional, como es el caso de los cuerpos académicos, donde el trabajo en colectivo es una constante.

Así, iniciativas como esta abonan a enriquecer el intercambio y fortalecer los lazos entre los investigadores nacionales y extranjeros, alcanzando los propósitos que el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) tiene para este tipo de redes, caracterizadas por la "asociación voluntaria de investigadores o personas con interés de colaborar para atender un problema prioritario" (Conacyt, 2014, s/p).

Difusión del conocimiento. Esta segunda consideración pone el acento en la necesidad y preocupación que existe entre los investigadores por difundir sus trabajos fuera de las instituciones donde laboran y más allá de la región geográfica en que habitan. Para ello establecen valoraciones sobre las publicaciones en las que resulta más conveniente y atractivo depositar sus trabajos.

Aunque el propósito establecido en la convocatoria fue que los artículos sirvieran para analizar los diversos problemas de enseñanza y aprendizaje que se presentan en las aulas, desde el preescolar hasta nivel superior, y que las contribuciones incluyeran experiencias de aprendizaje y propuestas de mejora en todos los niveles educativos, abordados desde diversas posturas teóricas, lo cierto es que el grueso de los artículos estuvieron en los temas relacionados con las áreas de ingeniería a nivel superior. Sin embargo, esta característica no le resta importancia y por el contrario ayuda a identificar las áreas y espacios donde la investigación es más abundante y se encuentra más fortalecida.

La expansión de las tecnologías de la información y la comunicación propician el intercambio acelerado del conocimiento, y en este contexto es necesario que los productos de investigación estén disponibles y accesibles para los usuarios potenciales a través de diversas plataformas y formatos.

La Rediech apoya a los investigadores en el anterior propósito y dentro de sus objetivos prioritarios se encuentra el de "Promover la producción y difusión de conocimientos en el campo educativo" (Rediech, 2010, p. 1). Sus acciones se encaminan a generar espacios de publicación –en un primer momento– y posteriormente a luchar por alcanzar estándares editoriales nacionales e internacionales, como es el caso de la política de indexación.

A últimas fechas la revista ha logrado sumar a sus primeros índices (Latindex, SciELO México, CLASE e IRESIE) la inclusión en cuatro nuevas bases de datos que vienen a mejorar la visibilidad de los trabajos publicados: Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal (REDALyC), Directory of Open Access Journals (DOAJ), Red de Revistas Latinoamericanas en Ciencias Sociales (LatinREV) y Fundación Dialnet/Universidad de La Rioja.

De esta manera es como *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech* realiza esfuerzos para que los productos lleguen al público interesado, destinando sus recursos económicos y humanos en aras de alcanzar una mayor visibilidad del conocimiento.

Matemáticas en educación. La tercera consideración corresponde al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas como un asunto mayor en el currículo educativo actual. El plan de estudios vigente para la educación básica señala que las bases del pensamiento matemático se establecen desde el nivel de preescolar, cuando los niños reconocen la importancia y utilidad de los números o cuando son capaces de resolver problemas en las que utilizan diferentes estrategias, donde incorporan –de manera paulatina– los algoritmos convencionales (SEP, 2011).

El interés por el conocimiento matemático, a etapas tempranas de la vida, es un requisito fundamental para despertar el gusto por las carreras ingenieriles en las que el Plan de Estudios para la Educación Básica considera que está la clave para "la producción de conocimientos que requieren las nuevas condiciones de intercambio y competencia a nivel mundial" (SEP, 2011, p. 48).

En los niveles de educación primaria y secundaria, los estudiantes avanzan en la adquisición de conocimientos y cada día se convierten en personas más competentes para formular y validar conjeturas, plantear nuevas preguntas; comunicar, analizar e interpretar procedimientos; buscar argumentos, encontrar diferentes formas de resolver problemas y manejar técnicas de manera eficiente.

A pesar de los esfuerzos que diariamente se realizan en las escuelas, los resultados en las evaluaciones nacionales e internacionales, que dan cuenta del nivel de logro de los estudiantes, siguen siendo desalentadores. El Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (Planea), que es una estrategia del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) para conocer el nivel de logro de los aprendizajes clave establecidos en el currículo, señala que aún falta mucho por hacer en el área de las matemáticas.

Planea 2017 prácticamente reprobó al 66.2% de los estudiantes de educación media superior que presentaron la prueba, al ubicarlos en el nivel I, que corresponde a un grado en el que tienen dificultades para realizar operaciones con fracciones y operaciones que combinen incógnitas o variables (representadas con letras), así como para establecer y analizar relaciones entre dos variables (INEE, 2017). En el nivel II, que corresponde también a un grado bajo de dominio de conocimiento, el porcentaje fue de 23.3% y solamente un 10.5% alcanzaron los niveles III y IV con un 8% y 2.5%, respectivamente.

Con este panorama sucinto encontramos que las posibilidades que ofrece el estudio de las matemáticas son por demás relevantes, considerando la urgencia de contar con herramientas que ayuden en la formación de especialistas en el área y –sobre todo– en círculos académicos de discusión que incidan en la generación de políticas educativas realistas, que incorporen los resultados de la investigación educativa en los proceso de diseño curricular.

Jesús Adolfo Trujillo Holguín
Director

Referencias bibliográficas

Conacyt. (2014). *Programa de redes académicas temáticas Conacyt. México: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología*. Recuperado de https://www.conacyt.gob.mx/index.php/el-conacyt/desarrollo-cientifico/redes-tematicas-de-investigacion

INEE. (2017). *Planea. Resultados nacionales 2017*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Rediech. (2010). *Estatutos de la Red de Investigadores Educativos Chihuahua.* Chihuahua: Red de Investigadores Educativos Chihuahua.

SEP. (2011). *Plan de estudios 2011.Educación básica.* México: Secretaría de Educación Pública.

[Presentación temática]

Aprender y enseñar matemáticas: desafío de la educación

SÁNCHEZ LUJÁN Bertha Ivonne

La edición de este número obedece a dos razones: por un lado posicionar a *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH* en diversas comunidades educativas, y por otro mostrar la matemática escolar como un espacio de generación de conocimiento.

Uno de los propósitos de la Red de Investigadores Educativos Chihuahua (Rediech) es *promover la producción y difusión de conocimientos en el campo educativo*, y una de las acciones para cumplirlo es la publicación de esta revista, cuya inclusión en las bases de datos Latindex, Iresie, CLASE, SciELO, REDALyC, DOAJ, LatinREV y Dialnet representa una oportunidad de crecimiento y un reto para conservar las pautas de indexación y seguir creciendo. Para los autores implica mayor visibilidad de sus trabajos a nivel internacional, con opciones de citación, y la seguridad de publicar en una revista con altos estándares de calidad académica y editorial.

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas constituye un tema fundamental en educación por las dificultades que se presentan en el aula, los resultados a nivel internacional de diversas pruebas estandarizadas y la poca aceptación de esta ciencia por parte de los estudiantes. La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) define la competencia matemática como aquella que "implica la capacidad de un individuo de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, para hacer juicios bien fundamentados y poder usar e involucrarse con las matemáticas" (OCDE, 2016). Esta competencia es evaluada con la prueba PISA, en la cual los estudiantes en nuestro país obtuvieron un promedio de 408 puntos en 2015, comparado con los países que conforman la OCDE cuyo promedio es de 490 en competencia matemática. De acuerdo con la nota por país, el 57% de los estudiantes no alcanzan el nivel 2 (básico) de un total de seis niveles. Estos resulta-

Bertha Ivonne Sánchez Luján. Profesora-investigadora adscrita al TecNM: Instituto Tecnológico de Ciudad Jiménez, México. Es miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, del Consejo Mexicano de Investigación Educativa, de la Sociedad Matemática Mexicana y de la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa. Líder del cuerpo académico reconocido por Prodep "Innovación educativa y matemáticas en nivel superior". Es doctora en Matemática Educativa por CICATA-IPN. Acreedora al Premio Estatal de Ciencia Tecnología e Innovación Chihuahua 2014. Investigadora anfitriona del "Verano de la investigación científica" avalado por la Academia Mexicana de Ciencias. Sus líneas de investigación versan sobre la enseñanza de la matemática a nivel de ingeniería. Correo electrónico: ivonnesanchez10@yahoo.com.

dos son preocupantes, de forma tal que las investigaciones y experiencias exitosas en apoyo a la alfabetización matemática merecen divulgarse.

Entre las contribuciones recibidas, que incluyen experiencias de aprendizaje y propuestas de mejora tanto para estudiantes como para la formación de docentes en el área, están fundamentadas en diversas teorías y propuestas metodológicas. Una de ellas es la teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME), con la premisa de que el conocimiento matemático es construido con base en prácticas sociales que norman la actividad de quienes lo construyen, además de que posee componentes sociales y culturales que le dan sentido, significado y un carácter situado.

Desde esta perspectiva, para entender el conocimiento matemático es necesario reconocer la relación dialéctica entre este y el sujeto individual, colectivo e histórico, de modo que pueda desentrañarse la naturaleza sociocultural que acompaña al conocimiento (Cantoral, 2013).

Una propuesta metodológica es la modelación matemática, que se pone de manifiesto con la relación entre las matemáticas y el estudio de sus aplicaciones (Rodríguez y Quiroz, 2015). Representada como estrategia didáctica, surge en el planteamiento de situaciones "reales" como un medio que permite la creación o uso de modelos matemáticos (Niss, Blum y Galbraith, 2007). La OCDE considera a la modelación matemática como una de las pautas evaluables en la prueba PISA.

La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) también se encuentra presente. En este enfoque, las actividades de enseñanza-aprendizaje son estructuradas por praxeologías matemáticas cuyos objetos dejan fuera concepciones que dieron origen a la construcción social de los saberes sobre los que descansa actualmente la enseñanza de la matemática (Sánchez y Camacho, 2017); el uso de recursos de otras disciplinas deviene en problemas prácticos (en estos casos) propios de las carreras de ingeniería.

El diseño de situaciones de aprendizaje es una parte sustantiva para el proceso de adquisición de conocimientos. Una de las aportaciones a la didáctica de las matemáticas es la teoría de las situaciones didácticas mediante "un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable" (Brousseau, 2000).

En este número, Isabel Tayub y Gabriela Buendía Ábalos presentan un trabajo de corte socioepistemológico acerca del uso de las gráficas lineales y su resignificación. Consideran diferentes escenarios educativos y analizan cómo se usa el conocimiento matemático en un ambiente profesional y académico del área de ingeniería, de acuerdo al perfil investigativo. De igual manera reflexionan cómo se genera un saber funcional al provocar un cambio en las explicaciones de la problemática educativa y cómo ese conocimiento cobra sentido y significa su práctica a través de tareas clave para quien lo usa; de esta forma se puede hablar de un desarrollo del pensamiento matemático en el aula.

Con la misma intención de presentar una matemática en contexto, al aplicar la socioepistemología y contribuir a la formación de profesionales, Adriana Galicia y

Lorena Landa, del Instituto Tecnológico de Acapulco, junto con Alfonso Rafael Cabrera de la Universidad Politécnica de Puebla, muestran cómo es que estudiantes de ingeniería bioquímica participan activamente en un proceso técnico y de innovación al construir la curva de calibración de una sustancia en una muestra dada por espectrofotometría, a través de la vinculación entre varias asignaturas y la deconstrucción de algunas prácticas escolares, lo que le otorga un sentido práctico y versátil a los conocimientos matemáticos.

El concepto de función ha sido ampliamente estudiado por las dificultades que presenta en el aula, además de ser la base sobre la cual se construye el cálculo. Es así como se muestra una modelización de una actividad de la física para mejorar la enseñanza de este concepto por profesores investigadores del Tecnológico Nacional de México: Alberto Camacho Ríos, Verónica Valenzuela González y Marisela Ivette Caldera Franco. La práctica se realizó con estudiantes de ingeniería en un contexto no matemático al analizar el comportamiento del circuito de carga de un condensador, lo cual reafirma la aplicación de los conceptos matemáticos en diferentes contextos.

La formación de ingenieros es un tema de actualidad por la creciente necesidad de profesionales es esta área. En este sentido, Ruth Rodríguez Gallegos, profesora-investigadora del Tecnológico de Monterrey, presenta un análisis de recomendaciones de diversos organismos nacionales e internacionales y destaca la importancia de desarrollar competencias tanto disciplinares en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM por sus siglas en inglés), como competencias genéricas entre las que destacan el pensamiento holístico, análisis y reflexión, aprendizaje activo y habilidades de comunicación, entre otras. En este artículo se propone la modelación matemática y la simulación en el ámbito escolar como una forma de acercar a los estudiantes a las prácticas ingenieriles.

El uso de herramientas tecnológicas en educación es ineludible, toda vez que vivimos en la era de la información y no es posible sustraerse o limitar su aplicación en el salón de clases. Por otro lado, la formación de profesores es una etapa clave para la mejora del proceso educativo. Es así como se conjuntan estos dos elementos en el artículo de José David Zaldívar Rojas, Samantha Analuz Quiroz Rivera y Gonzalo Medina Ramírez. Ellos muestran un modelo de instrucción para docentes que promueve la trasversalidad al presentar “La genética de acuerdo a las leyes de Mendel” en una situación de modelación matemática con el apoyo de calculadora, que es utilizada para realizar la simulación del experimento a partir de datos reales; y apoya, además, en la formulación del modelo matemático. Todo esto convierte la clase en una sesión reflexiva, de discusión de ideas y aprendizaje colaborativo para los futuros docentes.

El siguiente trabajo muestra una situación didáctica bajo el esquema de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, diseñada para establecer la relación estudiante-profesor y medio didáctico, con estudiantes de nivel medio en el estado de Zacatecas. Son Eduardo Carlos Briceño Solís y Lizbet Alamillo Sánchez, quienes muestran los resultados de utilizar el tangram como material didáctico en el desarrollo de figuras geométricas para que los estudiantes construyan las nociones de semejanza y proporcionalidad, al formular preguntas individuales y colectivas, derivado de prácticas de medición y comparación de figuras. Lo cual deja de lado el enfoque algorítmico y posiciona a los estudiantes en un espacio de reflexión continua.

Para cerrar este número, María del Socorro García González, de la Universidad Autónoma de Guerrero, México, y María Isabel Pascual, de la Universidad de Huelva, España, presentan un trabajo centrado en las emociones del profesor de matemáticas, con el cual pretenden visibilizar las variables afectivas en la enseñanza de las matemáticas y llevar al lector a reflexionar sobre su importancia. Utilizan diversas técnicas (videograbación y entrevistas) para reafirmar el papel de las emociones como motor de la acción y la relación de estas con el conocimiento profesional.

Es de esta forma en que los autores participantes en esta edición plasman diversas realidades del entorno educativo en el nivel medio, medio superior y superior, así como en la capacitación y actualización de docentes formadores de los ciudadanos que el país requiere.

Agradecimientos

Al Dr. Jesús Adolfo Trujillo Holguín, director de *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH* por haberme permitido coordinar el presente número temático.

Referencias bibliográficas

Blum, W. y Niss, M. (1990). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, *12*(1), 5-38.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2016). *Resultados PISA 2015 Nota país.* París, Francia: OCDE Publishing.

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2015). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 99-124.

Sánchez, B.I. y Camacho, A. (2017). Nuevos objetos y nuevas técnicas para la enseñanza de la matemática. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, *12*(1), 115-131.

Gráficas lineales: un proceso de significación a partir de su uso en ingeniería

Linear graphics: A process of meaning from it use in an engineering

TUYUB SÁNCHEZ Isabel
BUENDÍA ÁBALOS Gabriela

Recepción: agosto 9 de 2017 | Aprobado para publicación: septiembre 11 de 2017.

Resumen
En este escrito se analiza el uso de gráficas lineales en una maestría en ingeniería con la intención de generar una base de significación para el desarrollo de pensamiento matemático funcional. Esta investigación de corte socioepistemológico muestra tres casos ilustrativos sobre cómo esta comunidad académico-científica usa gráficas cartesianas. Se evidencian significados propios que provienen del uso de conocimiento matemático y que se integran en una significación mayor con una riqueza en la articulación de nociones como pendiente de rectas y puntos de intersección. El objetivo es mostrar la factibilidad de un cambio didáctico de los objetos hacia las prácticas, ya que estas favorecen un desarrollo intencional de usos del conocimiento matemático, propuesta que puede permear a lo largo del contexto escolar como una herramienta para el desarrollo de pensamiento matemático.

Isabel Tuyub Sánchez. Docente de tiempo completo en la Universidad Autónoma de Yucatán. Es maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Su línea de investigación se refiere a la construcción social del conocimiento matemático. Ha publicado en revistas especializadas internacionales producto de investigaciones y trabajo colegiado con cuerpos académicos universitarios. Correo electrónico: isabel.tuyub@correo.uady.mx.

Gabriela Buendía Ábalos. Afiliada a la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC. Es doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) y miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel 1. Su línea de investigación se refiere a la construcción social del conocimiento matemático escolar. Ha publicado en revistas especializadas nacionales e internacionales los resultados de proyectos y el trabajo continuo de profesores y alumnos de posgrado. Correo electrónico: buendiag@hotmail.com

Palabras clave: GRÁFICAS LINEALES, INGENIERÍA, MATEMÁTICA EDUCATIVA.

Abstract
In this paper we analyzed the use of linear graphs in an engineering community in order to generate a significance base for the development of a functional mathematical reasoning. This research is based on the socioepistemological framework. We present three illustrative cases on how the scientific-academic community uses cartesians graphics. From these uses, meanings for mathematical knowledge are integrated into a richer and articulated greater significance on the notion of lineal slope and points of intersection. The objective is to show the possibility of a didactical change from objects to practices, proposal that can permeate along the school context as an educational tool for the development of mathematical reasoning.

Key words: LINEAR GRAPHS, ENGINEERING, EDUCATIONAL MATHEMATICS.

1. Introducción

Partimos de reconocer que existen al menos dos escenarios para la matemática: uno estructurado, sobre el que se diseña la matemática que se enseña en la escuela, y otro en el que se reconoce su importancia en lo cotidiano o en el ámbito profesional. El primero debería impactar en el segundo, pues uno de los fines de la educación es formar profesionales capacitados para resolver problemas de la sociedad actual. Pero para que ello suceda, la segunda debería poder dar indicios de elementos de significación que favorecieran el objetivo de la matemática escolar.

El interés de este escrito radica en cómo generar un puente entre estos dos escenarios; no se está pensando en recrear situaciones problema que se presentan en la vida real o profesional y llevarlo a contextos escolares con tiempos didácticos controlados y objetivos diferentes que ocasionan didácticas artificiales. La estrategia tampoco busca explicitar los conocimientos matemáticos inmersos en lo profesional, convertirlos en los contenidos iniciales del currículo como técnicas que sirvan al futuro profesionista en cualquier área que desee desempeñarse.

La propuesta presente en este escrito se enfoca en identificar qué matemática es funcional en escenarios profesionales específicos, así como cuál matemática permite un desarrollo de pensamiento matemático y cómo está presente en esos contextos. Importa reconocer el quehacer de una cierta comunidad y de sus miembros y en ello, cómo usa la matemática, en qué momento se emplea, por qué y para qué. Estos cuestionamientos generales nos permitirían proponer un eje para el aprendizaje de las matemáticas. Coherentemente, este eje no pudiera estar enfocado en un cúmulo de objetos matemáticos aislados entre sí; más bien es un eje en el que incluso puedan converger varias nociones.

Así, en contraste con la pregunta de cuánto debe saber de matemáticas un alumno, nos cuestionamos sobre el uso de la matemática en diferentes contextos. Ello le provee a la matemática escolar una base de significación diferente (Cordero *et al.*, 2016), pues se genera no solo a partir de la matemática misma y su estructuración lógica, sino analizando su uso en un contexto de interés. En particular analizaremos el uso de las gráficas cartesianas en una comunidad científica de ingeniería, para con ello proponer una base de significación para el conocimiento matemático referido a ese tópico y que signifique a la matemática de dicha comunidad y al sistema educativo en general.

Cordero *et al.* (2016) proporcionan evidencia de cómo las gráficas son herramientas que sostienen y desarrollan argumentos cualitativos para construir conocimiento relativo a temas matemáticos, como las ecuaciones diferenciales. Al ser estas herramientas imprescindibles para los ingenieros, el uso significativo de las gráficas cartesianas proporciona una base de significación que enriquecen considerablemente los aspectos analíticos de la misma. Las gráficas se muestran no solo como mera ilustración, sino como parte de un conocimiento funcional y articulado vigente en una comunidad de ingeniería.

Estos significados de las gráficas, nuevos o diferentes a los que se suelen presentar en el discurso matemático escolar tradicional, se evocan intencionalmente por el uso que de ellas se hace en la comunidad de estudio. Dichos significados los entenderemos como una *resignificación de gráficas y sus elementos* en un contexto situado a partir de su uso.

Esta resignificación de gráficas es nuestro objeto de estudio. En este escrito presentamos evidencia a partir del uso de gráficas cartesianas lineales en una comunidad de Maestría en Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán. A partir del análisis de las gráficas en problemas asociados a las ramas de la Ingeniería en Construcción y la Ingeniería Ambiental, evidenciamos dos usos generales de las gráficas cartesianas lineales de variación y cambio: organización de la información y el mostrar procedimientos y técnicas. Ello conformará una base de significación para una matemática que pudiera ser más funcional tanto en el contexto profesional particular, como a lo largo del currículo escolar.

2. El uso del conocimiento: aspectos teóricos

El objetivo del escrito es analizar cómo se usa el conocimiento matemático en un ambiente de corte profesional y académico del área de ingeniería con perfil investigativo y cómo se genera un saber funcional; ello permitirá indagar elementos de resignificación asociados a las gráficas cartesianas lineales de variación y cambio que son propias de la comunidad.

La estrategia usual de los sistemas educativos gira alrededor de la aplicación de los conceptos matemáticos; en consecuencia, el interés está en lograr acumular definiciones, algoritmos: primero se enseña y luego se aplica. En otro sentido, nuestra propuesta es generar aprendizajes basado en prácticas; la idea de aprendizaje como adquisición cambia para reconocer que el saber que nos importa desarrollar es el conocimiento en uso: de alguna manera se aplica aquello que te resulta significativo porque lo usas. Existe entonces un proceso continuo de resignificación a través del uso del conocimiento matemático y normado por el ejercicio intencional de prácticas que le son propias (Cantoral, 2013). Hablar de resignificación del conocimiento matemático busca entonces generar un cambio en las explicaciones de la problemática educativa relativa a las matemáticas que cambia desde centrar el objeto matemático hacia las prácticas y usos relacionadas epistemológicamente con él.

Bajo esa perspectiva, la teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME) como sistema teórico sostiene este estudio, ya que se ocupa del problema que plantea el cómo está constituido el saber matemático entre grupos humanos y la sociedad. Asume la legitimidad de toda forma de saber, sea popular, técnico o especializado, pues reconoce que en su conjunto constituyen gran parte de la sabiduría humana. Este marco modela la construcción social del conocimiento matemático; es decir, considera la construcción del conocimiento matemático desde un punto de vista situacional, tomando elementos como el contexto, la individualidad de los estudiantes, su entorno sociocultural y las relaciones que se presentan dentro de su comunidad, las afecciones y concepciones hacia la matemática, entre otros elementos de corte sociocultural; todo ello para entender cómo se construye cierto conocimiento matemático y por qué es de esa manera (Cantoral, 2013; Cordero, 2011).

Dentro de este marco se han identificado diferentes fuentes de resignificación y, por lo tanto, de formas de construcción de conocimiento matemático. Ha habido investigaciones de corte histórico –véase por ejemplo Buendía y Montiel (2011)– para determinar, desde una epistemología de prácticas, elementos para significar lo trigonométrico a partir de sus contextos de uso; otras que indagan escenarios de carácter profesional –por ejemplo Tuyub y Cantoral (2012)– con intención de inferir nociones que son implementadas de forma incluso inconsciente y que se hacen presentes en el diario quehacer de ese profesional. Existen también investigaciones que toman como fuente de resignificación el contexto cultural o cotidiano –por ejemplo, la investigación de Zaldívar y Cordero (2012)– con el propósito de mostrar que no es el escenario escolar el único que marca el aprendizaje con significado, sino que lo cotidiano proporciona elementos que significan el conocimiento matemático.

Esta tendencia busca cuestionar el conocimiento matemático que hoy vive en el aula: ver qué propiedades y elementos están detrás del concepto a partir del uso de este, cuál es el papel de diferentes contextos en los significados que se muestran en el aula que no son necesariamente bajo los cuales se originó un concepto. A esto nos referimos cuando afirmamos cuestionar la matemática de la escuela a partir, en primera instancia, de una descentración en el objeto matemático. Consideramos entonces una fuente social de reconstrucción de significados asociados a un conocimiento matemático (la *resignificación* continua de un objeto matemático) y ello se hace a través de analizar el uso de dicho conocimiento en un contexto específico; en su conjunto resultan una herramienta que permite la reconceptualización de saberes matemáticos (Biehler, 2005).

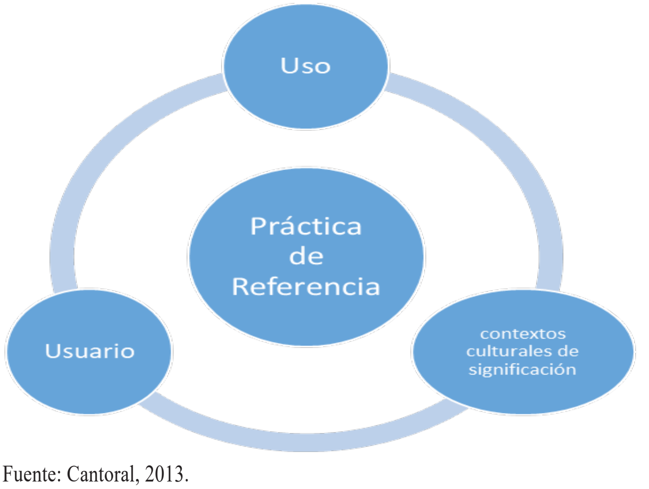
Bajo esta visión, entenderemos por *uso del conocimiento* aquel que se utiliza con cierto significado (no necesariamente el otorgado por el discurso matemático escolar) y con ello dar paso a reflexionar sobre la matemática funcional que permea en la comunidad de estudio, como aquella *matemática con sentido* para quien la usa (Cantoral, 2013; Cordero, 2011).

La TSME le apuesta entonces al *saber matemático* como un conocimiento en uso y considera clave problematizar dicho conocimiento. Esta problematización se logra al considerar cuatro elementos principales: una práctica de referencia como elemento central alrededor de la cual se interrelacionan tres elementos esenciales: el uso, el usuario y los contextos socioculturales de significación. En la figura 1 se aprecia un esquema sobre estos cuatro elementos para la problematización del saber.

Para nuestra investigación, dicho esquema se percibe de la siguiente manera:

- La *práctica de referencia* se refiere al quehacer de la comunidad de la Maestría en Ingeniería, cuyo objetivo es producir conocimiento que posea un impacto social para la región.
- Un *uso* que se fomenta en la práctica de referencia abordada con base en el concepto matemático asociado (gráficas lineales) a través de tareas específicas identificadas en el quehacer.
- Un *usuario* reflejado en la comunidad como dos grupos esenciales: uno de expertos (profesores-investigadores) y otro de aprendices (estudiantes), compuesta por ingenieros, arquitectos y biólogos que participan en un sistema de aprendizaje

Fig. 1. Problematización del saber.



Fuente: Cantoral, 2013.

social para el estudio de la ingeniería en construcción y ambiental. La noción de expertos y aprendices la retomamos del trabajo realizado por Lave y Wenger (1991).

- Los *contextos socioculturales de significación* son dibujados por los usos del conocimiento matemático es donde la comunidad significa su práctica a través de tareas clave que realiza para fomentar sus productos de investigación; dichas tareas se explicitarán en cada uno de los casos ilustrativos.

Al tomar esta perspectiva socioepistemológica, las gráficas pueden ser consideradas como un producto material continuo, porque son resultado de la experiencia histórica de comunidades, grupos sociales y científicos que, dependiendo de la institución a la que pertenecen, las norman y las requieren para ciertos fines, por ejemplo cuando se introducen y permanecen en el sistema educativo, transformándose y transformándolo a su vez (Wenger, 2001; Buendía, 2010; Cordero, Cen y Suárez, 2010; Suárez, 2014).

En particular, el *uso de gráficas* en la TSME ha sido estudiado a través de los análisis de los funcionamientos y formas de las mismas (Cordero, 2008; Suárez y Cordero, 2010; Buendía, 2012). Estos funcionamientos y formas son situacionales y se dan a la luz de tareas concretas a realizar de manera dialéctica y continua. En particular entenderemos el *funcionamiento* relativo cómo y para qué le sirve la gráfica a la comunidad; la *forma* de la gráfica se refiere a la apariencia perceptible del objeto gráfica, así como cuáles son las maneras en la que determinada comunidad actúa sobre este: en qué se fijan para analizar, argumentar y cómo lo hacen en determinada tarea; es decir, qué de lo que veo de la gráfica se utiliza y por qué.

Por tanto, el análisis de los usos de las gráficas lineales se realizará por medio de la identificación de las interrelaciones entre los *funcionamientos* y las *formas* de las gráficas que se presentarán en los tres casos ilustrativos incluidos en este escrito.

3. Aspectos metodológicos

Se utilizó una metodología cualitativa como investigación no participante, en la que se grabaron clases, seminarios y se analizaron textos como artículos de investigación y tesis en diferentes ambientes propios de la comunidad.

Nuestro sujeto de estudio fue la comunidad de la Maestría en Ingeniería. Para poder estudiarla, la entendimos como una comunidad de práctica (CoP) en el sentido de Wenger (2001), cuyo objetivo es construir conocimiento científico de corte ingenieril; entre aprendices y expertos se fomenta una negociación de significados para generar *cosificaciones* (Tuyub, Martínez y Buendía, 2011) –productos finales propios– las cuales fueron analizadas para la inferencia de usos de gráficas cartesianas lineales.

Los llamados expertos en la CoP son los doctores investigadores, y los principiantes o aprendices son los estudiantes de la maestría. Estos estudiantes son egresados de licenciatura con o sin experiencia laboral que desean convertirse en expertos de alguna área específica de la maestría, e incluso realizar labores de investigación. Los miembros tienen un tiempo y un espacio propio para interaccionar entre ellos, por lo que hay oportunidad de que los aprendices conozcan a varios expertos y estén inmersos en las problemáticas de la comunidad. Hay un interés explícito por parte del programa institucional en la trasmisión de conocimientos para enriquecimiento de la comunidad. Las formas en que los integrantes se relacionan en un principio es jerárquico con respecto a los expertos, y de iguales entre los principiantes; también hay cierto respeto de estos últimos con los estudiantes avanzados. Luego, de acuerdo con sus intereses, se incorporan en grupos de trabajo más pequeños, ya sea un estudiante con un doctor investigador responsable o formando un grupo pequeño con otros estudiantes a cargo de uno o varios doctores; el rol jerárquico evoluciona a un rol de iguales, regido por los intereses compartidos, en el que el aprendizaje se produce en la práctica compartida.

Se denominan *cosificaciones* a los productos generados por la comunidad y son la explicitación de los procesos de esta comunidad manifestados en algo físico que permite el continuo de su conocimiento (Lave y Wenger, 1991). Las cosificaciones analizadas fueron proyectos finales, tesis de maestría y artículos de investigación publicados por los aprendices y expertos; de ahí que fueron pieza clave para analizar su quehacer.

Se eligieron gráficas cartesianas lineales de variación y cambio, porque son las que se presentan en la mayoría de los quehaceres de la CoP. De esta manera permitieron ser un medio transversal de análisis, porque sin importar qué especialidad ingenieril se está abordando, aparecen para resolver problemáticas de interés de la comunidad.

Por medio de los constructos teóricos socioepistemológicos del *funcionamiento* y la *forma* se pudieron categorizar dos tipos generales de usos:

- *La organización de la información*, cuyo objetivo es la comprobación de hipótesis comparando, por ejemplo, normas con propuestas alternativas producto de la investigación.
- *El uso de procedimientos y técnicas* que se manifiesta cuando la lectura de la gráfica permite predecir y tomar decisiones mediante la manipulación de ciertos elementos de la gráfica.

Las gráficas cartesianas se emplean en la mayoría de los casos para comprobar resultados y propuestas provenientes de la investigación en el área. Dado el carácter situacional de los usos de las gráficas para analizar su relación con la construcción de conocimiento científico, las *tareas* que emanan del quehacer de la misma comunidad de estudio enmarcan dicho y se pueden organizar por el cómo implementan los usos descritos.

La unidad mínima de análisis para poder estudiar los usos de las gráficas lineales en esta CoP fue tomada de los trabajos realizados por Montiel y Buendía (2012); se basa en la interrelación entre tres componentes: el *saber matemático*, que recae en las gráficas de variación y cambio; la *actividad humana*, referida el quehacer propio de la CoP y que se refleja en las tareas específicas; y la *transmisión del saber*, presente en las cosificaciones. Esta unidad de análisis (figura 2) considera las cuatro dimensiones (lo cognitivo, lo epistemológico, lo didáctico y lo social), que de manera sistémica propone la TSME para sus estudios.

4. Análisis de usos de las gráficas

Se han encontrado dos grandes usos generales de la CoP para las gráficas: la organización de la información y el mostrar procedimientos y técnicas. Bajo este esquema general, presentamos a continuación tres casos ilustrativos de usos de las gráficas que tienen que ver con tareas específicas a realizar. Dentro de "Organización de la información", analizaremos las gráficas de líneas de balance (LDB) y las curvas de calibración del plomo y níquel en sedimentos marinos. Dentro de "Procedimientos y técnicas" se analizará el empleo de la técnica de líneas de balance para proyecciones de construcciones de viviendas.

4.1. Caso ilustrativo 1: gráfica de LDB

La tarea que enmarca este análisis de usos fue ordenar la información de un programa de obra en una gráfica de líneas de balance.

El programa de obra que se presenta se refiere a un proyecto de construcción de viviendas. En la parte superior de la figura 3 se muestra el cronograma de actividades respecto al plan de carácter indicativo para el proyecto de un proyecto y las actividades a realizar: cimentación, muros, loza y acabados. Se presenta el cronograma para cuatro viviendas y la duración de cada actividad se indica con las barras horizontales. Como puede verse, es factible que las actividades puedan hacerse en una misma fecha señaladas con flechas verticales.

Figura 2. Unidad de análisis.

Fuente: Montiel y Buendía, 2012.

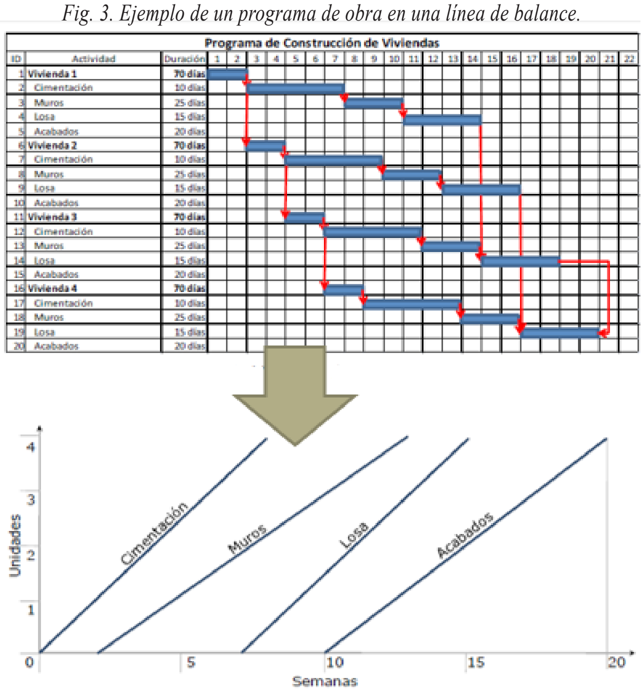
Loría (2013), doctor en Construcción, propone la gráfica de líneas de balance (LDB) para organizar la misma información de manera simplificada; permitiría además medir avances de programación (rendimientos) de actividades repetitivas con un enfoque de sistemas. La propuesta del experto consiste en una gráfica cartesiana en la que cada línea recta corresponde a cada actividad del programa de obra, que será llamada línea de balance, como se aprecia en la parte inferior de la figura 3. En el eje horizontal está el tiempo en semanas y en el eje vertical las cuatro viviendas consideradas en el caso ilustrado.

Podemos ver en la gráfica de las LDB que se muestra el "ritmo" de trabajo al cual deben ser realizadas todas las actividades que conforman un proyecto para concluirlo de acuerdo con lo programado; expresa tiempos planeados para la entrega de viviendas y cómo deben ser cumplidos esos tiempos (en términos de ritmos):

> [...] una gráfica de LDB no muestra relaciones directas entre actividades individuales; muestra una relación de resultados entre las diferentes operaciones y cómo cada operación debe ser completada a un ritmo particular para que la subsecuente proceda al ritmo requerido [Loria, 2013, p. 7].

El rendimiento es representado por la pendiente de los elementos lineales que representa el ritmo de ejecución de la actividad en cada uno de los elementos a construir. También se puede leer como conjunto: cómo debería ser una actividad con respecto a la otra. El "debería ser" se refiere a la relación entre las semanas transcurridas y las viviendas trabajadas.

Fig. 3. Ejemplo de un programa de obra en una línea de balance.



Fuente: Loría, 2013.

Analizando este uso, la *forma* de la gráfica organiza la información para identificar procesos que se repiten una y otra vez en las construcciones de casas y sistematiza tareas de una producción en masa en una lectura óptima que involucra una recta por tarea. Dichas rectas se distinguen unas de otras por el punto inicial y por sus pendientes: reflejan el ritmo de producción de cada actividad; es decir, cómo se espera que se desarrollen y reflejan también la coherencia entre actividades; por ejemplo, no puedo empezar con los muros de la vivienda uno hasta que su cimentación tenga su avance completo (aproximadamente en la segunda semana).

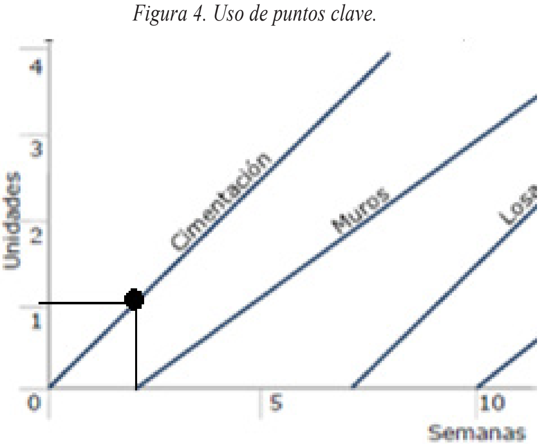
La gráfica *funciona* como un medio de optimización de la lectura para planear construcciones que demanden procesos que contienen actividades que se repiten. Esta planeación se da en términos de ritmos representados hipotéticamente por las pendientes de líneas rectas, así como por sus ordenadas al origen para marcar el inicio de cada actividad.

Diferentes elementos de lo lineal se están resignificando: la noción de pendiente y el significado de la ordenada a la origen de una recta; en particular, este último elemento se evidencia a través del significado de las intersecciones con el eje x para mostrar simultaneidad en las actividades. Esta resignificación se manifiesta al momento de la lectura global. Se pone en juego la noción de pendiente como ritmos de trabajo constantes, uniformes e invariantes. Estos ritmos son considerados dentro de una planeación de proyecto, tarea propia de la CoP que se asocia con la linealidad de las curvas manifestadas. Nótese cómo la herramienta visual hace de una organización de datos algo útil para la comunidad a través de lo lineal.

Otros elementos de la gráfica también están obteniendo significados a la luz de esta tarea y tomando en cuenta cómo son usados. Consideremos, por ejemplo, el punto coordenado que a continuación se señala en la figura 4. Aproximadamente será el punto (2,1).

Analizar de forma puntual estas LDB implicaría reconocer la relación entre tiempo de construcción con relación a una vivienda (la unidad 1 en este ejemplo). En ese tiempo es cuando la cimentación de la vivienda uno ha terminado y empieza

Figura 4. Uso de puntos clave.



Fuente: Loría, 2011.

el levantamiento de muros. Abriendo un poco el análisis y creando un intervalo alrededor del punto $t = 2$ podemos ver que antes de la segunda semana solo se está trabajando en la vivienda uno, y después en ambas viviendas. Este tránsito entre la forma de análisis puntual-intervalo permite desarrollar estrategias de variación y cambio en el que la gráfica se comunica con el usuario a través de lo que significa un punto coordenado. Esto funciona para que el plan de obra tenga coherencia en cuanto a las actividades sugeridas.

Los elementos propios de una gráfica cartesiana, como la etiqueta del eje horizontal, la etiqueta del eje vertical y la localización de un punto cartesiano, se resignifican trascendiendo del mero hecho de reconocer los elementos semióticos de una gráfica y de su estructuración como la representación de una función. Dichos elementos tienen una forma y un funcionamiento situacionales que enriquecen su significado con base en cómo son usados, en este caso para comunicar un plan de obra en cuanto a la coherencia y correcta ilación de las actividades de construcción necesarias.

4.2. Caso ilustrativo 2: curvas de calibración

La tarea se refiere a evaluar si la metodología con espectroscopía de absorción atómica por el método de flama es adecuada para determinar la existencia de plomo (Pb) o níquel (Ni) en sedimentos marinos de costas yucatecas (Aragón-Briceño *et al.*, 2011). El método analítico a emplear utiliza un equipo llamado espectrofotómetro para calentar, por medio de una flama, muestras de los sedimentos hasta convertirlos en gas (niebla atómica) y medir la absorbancia (cantidad de luz absorbida por el metal atomizado). Se cuantifica la concentración de dichos metales por medio de un haz de luz con lámparas específicas para cada metal, pues cada uno tiene su longitud de onda a la cual absorbe (Garay-Tinoco *et al.*, 2003). Para la validación de esta metodología se requieren cuatro características: linealidad, precisión, exactitud y límites de detección y cuantificación. Para este escrito solo se analizan ejemplos que utilizan gráficas para su estudio: linealidad y límites de detección.

Para considerar que los resultados obtenidos sean confiables se requiere la linealidad de la curva obtenida. Para ello se emplea un recurso gráfico llamado *curvas de calibración*, como las presentadas para Pb y Ni en la figura 5; en ellas, la cantidad de puntos en cada gráfica denota el número de muestras de sedimento marino con Pb y Ni experimentalmente tomadas. Para cada una de ellas se obtuvieron siete muestras a diferentes concentraciones (0.0, 0.3, 0.5, 1.0, 5.0 y 7.0 ppm, partes por millón), señaladas en el eje de las abscisas, las cuales arrojaron una medida de absorbancia en el eje de las ordenadas.

Cuatro de las siete muestras se tomaron en el intervalo de 0 a 1 ppm; es decir, con una concentración pequeña, porque las normas institucionales de validez indican que es el intervalo de mayor sensibilidad; si en ese intervalo los datos de la muestra se ajustan linealmente, el experimento es confiable, que es lo que se requiere para la hipótesis de la investigación.

Además de lo visual, los científicos comprueban el comportamiento de los puntos muestrales estadísticamente al proporcionar el coeficiente de correlación, el cual tiende a 1; esto quiere decir que las curvas de calibración mostraron linealidad, en el sentido de ajustarse a una línea recta.

Con apoyo de la gráfica, los investigadores primero deben validar el experimento al considerar lo que señalan las normas internacionales con base en el empleo de cuatro puntos de concentración en el intervalo cerrado (0,1) y tres más a 3, 5 y 7 ppm. En su experimento, los autores logran un intervalo amplio de fiabilidad en el que los datos se comportan linealmente:

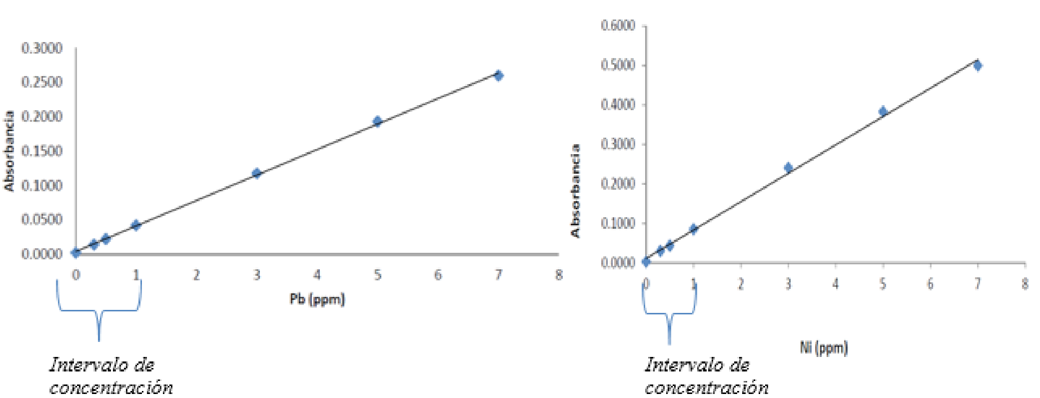
> […] el intervalo lineal que se maneja es muy amplio (0.3 ppm-7.0 ppm) y permite tener más seguridad de que la concentración de la muestra de sedimento marino sea cuantificable dentro de dicho intervalo [Aragón-Briceño *et al.*, 2011, p. 5].

La cuantificación que mencionan los autores es que los datos sobre la cantidad concentrada del Ni o Pb es confiable. Identificar visualmente el comportamiento lineal de los puntos obtenidos experimentalmente en este intervalo cerrado de gran amplitud, más allá del [0,1], permite comunicar a su comunidad la seguridad del experimento.

Nótese que el porcentaje de absorbancia (eje vertical) están en diferente proporción: los puntos de concentración del Pb están entre 0 y 0.05, mientras que los de Ni están entre 0 y 0.1.

Posteriormente, para completar la tarea, se analizan los límites de detección y cuantificación. Para la primera se realizó una comparación entre las medidas de las pendientes de las curvas de calibración. Se concluye que el Pb presenta dos órdenes de magnitud mayor respecto al Ni, lo cual se observa en la figura 5; esto se ve reflejado en la sensibilidad en el orden de miligramos por litro: "[…] Ni obtuvo una mejor sensibilidad, ya que presentó un límite de detección menor" (Aragón-Briceño *et al.*, p. 6). Esta conclusión se basa en el hecho de que la recta correspondiente al níquel tiene una mayor pendiente.

Figura 5. Curvas de calibración para plomo y níquel.



Fuente: Aragón-Briceño *et al.*, 2011.

La forma de la gráfica permite la comprobación de un buen muestreo por medio de un argumento visual referido a la linealidad de los datos, y en la comparación de estados de las dos gráficas con base en la magnitud de sus pendientes. Esta comprobación de un comportamiento lineal les funcionó para asegurar que el experimento sea legal y científicamente bien realizado; la comparación entre las rectas funciona para determinar la sensibilidad de las muestras con respecto a los metales, elementos fundamentales para la evaluación de la metodología a probar: un comportamiento lineal en las muestras apoya un muestreo de calidad del muestreo resultado del método elegido por los investigadores. Ello permite continuar en el estudio por medio de sugerencias, por ejemplo, respecto a la cantidad de muestras tomadas para la experimentación en comparación con las normas establecidas.

Al considerar el comportamiento lineal como base de la argumentación realizada se está resignificando la noción de pendiente como parte de la comprobación de hipótesis experimentales de la investigación, y con ello proponer un método de validación para los datos acorde a las normas: la linealidad en el intervalo de sensibilidad.

4.3. Ejemplo ilustrativo 3: técnica de LDB

Como se presentó anteriormente, LDB es una técnica gráfica que permite organizar la información necesaria para un proyecto de construcción de viviendas y permite apreciar, en un conjunto de líneas rectas, un gran número de actividades comunes. La pendiente de la recta representa el ritmo de trabajo bajo el cual debe realizarse todas las actividades que conforman el proyecto de ingeniería para concluirlo en un tiempo programado. Ello permite una justificación visual para que diversas actividades puedan llevarse a cabo –o no– simultáneamente. La localización de la recta, considerando simultáneamente ambos ejes, desarrollada argumentos de temporalidad y cantidad (de viviendas) para las actividades comunes (ver figuras 3 y 4).

Adicionalmente a este uso para organizar y presentar información, las LDB permiten predecir comportamientos del proceso en serie de construcción de viviendas. La tarea que presentamos a continuación es relativa al uso de las gráficas como procedimientos y técnicas para corregir la demora de avance real de un proyecto de construcción de viviendas.

En la figura 6 se presenta una técnica que permite visualizar y corregir la demora en el avance real de la obra de manera global y no solo por actividad o vivienda. Se presenta el proyecto de construcción de viviendas de fraccionamientos con avances reales (líneas punteadas) junto con el avance planeado (líneas continuas). Se presenta además una fecha de corte que se señala con una recta perpendicular al eje *tiempo*. En particular, un momento de análisis para la toma de decisiones por parte de los investigadores se refiere a los puntos de intersección de las LDB con dicha línea perpendicular (semana 12).

En primera instancia, y en un primer análisis de forma global, Loría enfatiza que esta técnica permite visualizar la recta continua como un ritmo de trabajo uniforme y constante, en contraste con el avance real, así como los retrasos que la obra sufre: hay un retraso de tres semanas en la terminación de la primera unidad, pues la actividad de acabados aún no ha finalizado (ver figura 7).

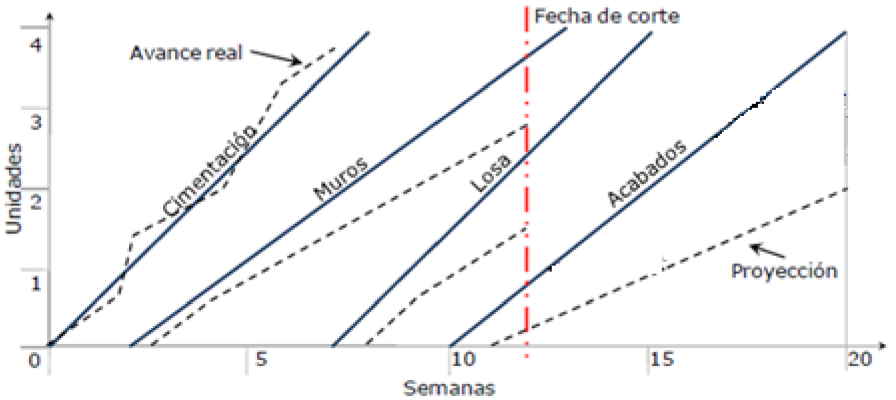
La forma en la que se interactúa con la gráfica se da a través de su lectura vertical, horizontal y la coordinación de ambas. Con respecto a la lectura vertical (de abajo hacia arriba), se identifica qué tan alejado está la línea punteada de la recta continua que sale del mismo punto inicial en el eje *x* (lo real contra lo planeado); ello permite visualizar el avance de cada actividad por vivienda. Por ejemplo, para el caso de los muros, se identifica la línea continua (avance programado) separada de la punteada (avance real), de tal forma que el avance real queda por debajo del supuesto; incluso la separación de las líneas es mayor a medida que avanza el tiempo.

Esta diferencia en el ritmo de trabajo puede llevar a una toma de decisión, como fue en el caso de la cimentación. El avance real estuvo por debajo del programado durante las primeras semanas, por lo que se decide incrementar el ritmo de realización, lo que se ve reflejado en el cambio de dirección de la línea punteada. Con esta medida, las líneas punteadas quedan por arriba del supuesto inicial, lo que lleva a disminuir nuevamente el ritmo de producción; estos tipos de ajuste se ven reflejados visualmente como trozos de rectas, con intención de tender a lo planeado (a la línea continua).

Bajo esta misma perspectiva vertical, las intersecciones –puntos clave– de la recta "fecha de corte" con las LDB (figura 6) se vuelven puntos clave para extrapolar con base al ritmo cómo se está alejando lo real de lo programado. Con base en la gráfica, los investigadores toman en consideración que la demora (rectas con menor pendiente en comparación con la planeada) podría corregirse al incrementar los ritmos de producción de los muros, la losa y acabados; para ello, entonces, hay que tomar decisiones, como la de incrementar la eficiencia o los recursos necesarios en aquella actividad donde no se está logrando la producción esperada.

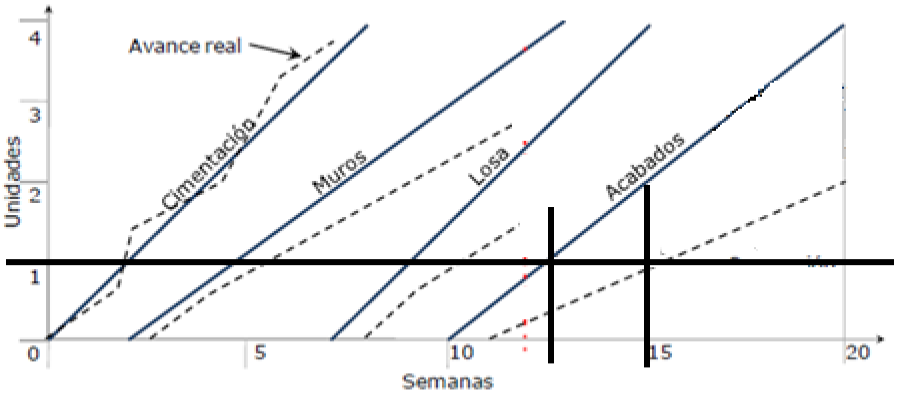
Si estos puntos clave se leen horizontalmente, puede realizarse el informe de avance respecto a las unidades de las viviendas. Por ejemplo, en la figura 8 puede

Fig. 6. Ejemplo de un programa actualizado con líneas de balance para la construcción de viviendas.



Fuente: Loría, 2013.

Figura 7. Un retraso de tres semanas.



Fuente: Loría, 2013.

observarse que en la fecha de corte, semana 12, los muros de la vivienda 4 debieron estar prácticamente terminados y, sin embargo, recién se están terminando los de la vivienda 3.

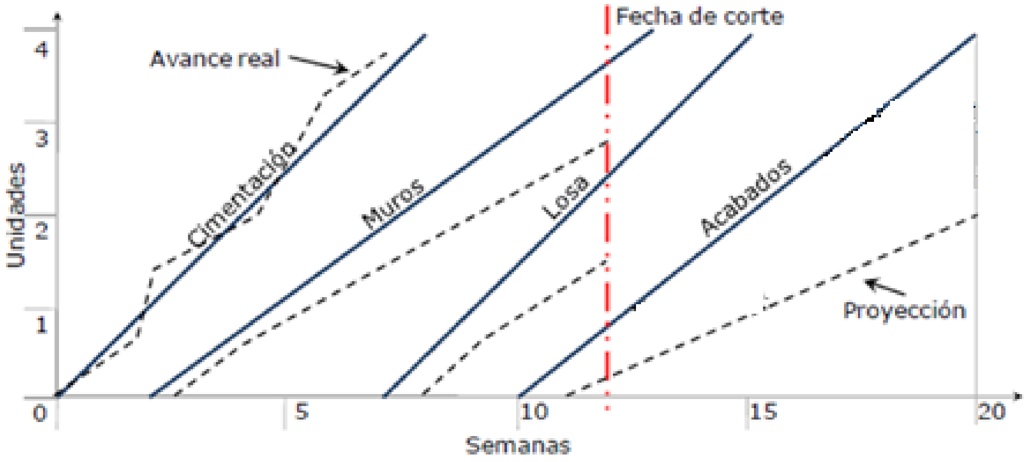
El funcionamiento es justo para tomar decisiones que permitan apegarse lo más posible a la planeación inicial y también para predecir, de acuerdo con el avance real, fechas de terminación del proyecto. Todo ello es de forma conjunta: en el tiempo, las viviendas y las actividades de construcción a considerar simultáneamente.

Este uso de la gráfica favorece una resignificación de la noción de pendiente como ritmo de producción. Es claro cómo un aumento o disminución del ritmo implica gráficamente una pendiente con una inclinación mayor o menor, respectivamente, para intentar aproximar lo real a lo hipotético. Podemos notar que a los investigadores no les interesa tener un ritmo mayor que el planeado, sino acercar la realidad al plan. Simultáneamente, los puntos de intersección se resignifican como puntos de referencia clave para la toma de decisiones, tanto en su lectura hacia el eje horizontal como hacia el vertical.

5. Discusión y comentarios finales

Las funciones lineales y sus gráficas son objetos matemáticos presentes en el currículo escolar desde el nivel básico. Sin embargo, el enfoque didáctico que se ha privilegiado ha sido el estudio de la función lineal enfatizando la adquisición de la noción pendiente a través de su fórmula asociada y de elementos como la intersección con el eje *y*; los significados para estos elementos de la función lineal suelen quedar ligados al aprendizaje de fórmulas. Se estudia la ecuación de la recta, su representación gráfica y, con suerte, se abordan modelos matemáticos asociados a la pendiente y a sus intersecciones con los ejes. Por ser un tema propio de la matemática básica, se suele creer que al abordarlo en esos niveles permite enseñarlo *de una vez y por todas*; de ahí en adelante se tratará entonces de *aplicaciones*.

Figura 8. Avance en los muros.



Fuente: Loría (2013).

Estudiar cómo el uso de las gráficas lineales significa elementos de lo lineal cambia el foco de atención de la adquisición del objeto (graficar una línea recta) hacia el desarrollo de prácticas como la graficación. Esta práctica se desarrolla a lo largo del sistema educativo y las gráficas son consideradas entonces como un saber continuo y funcional; son algo dinámico, temporal y evolutivo, un saber en uso con el que se desarrolla el razonamiento y permite la argumentación en diversas situaciones, con las cuales posee una relación dialéctica. Dejan de ser una entidad objetivada –y lista para aplicarse– para convertirse en una objetivable, sujeta a procesos continuos de resignificación que reflejan una matemática funcional.

En este escrito presentamos el uso de lo lineal, considerado como la gráfica más sus elementos asociados, en una comunidad de posgrado. En esta CoP se puede apreciar que los dos tipos de usos de las gráficas lineales ilustrados tienen en común funcionar como una herramienta visual de validación de resultados o comprobación de hipótesis. Las gráficas no son un fin en sí mismas, sino que tienen una intencionalidad de ser una herramienta visual e interesa saber de dónde se obtuvo, por qué, con qué fin, qué papel juega dentro de la comunidad. Esa es la fuente de resignificación para los elementos que caracterizan a lo lineal: la pendiente como una razón de cambio y la ordenada al origen.

La gráfica de LDB se usa para organizar información y para presentar una técnica de revisión de avance de obra, así como de corrección en los tiempos de la misma; un mismo objeto matemático –la gráfica– se usa de diferentes maneras, dependiendo de la tarea en la que está inmerso. De ella se pueden tener diversas significaciones, las cuales permiten generar un conocimiento matemático articulado sobre este objeto. Reconocer entonces los diversos funcionamientos y formas de un mismo objeto favorece su significación progresiva y, en consecuencia, un desarrollo de usos del conocimiento matemático.

En la comunidad de estudio, la significación de elementos de gráficas lineales se muestra no solo como primeros modelos para realizar análisis de comportamientos de fenómenos en la interpretación de ritmos o validación de hipótesis de las investigaciones de la CoP, sino también como ideales para planear y predecir sucesos; esto es linealizar fenómenos que por naturaleza no lo son.

Con ello se está resignificando la gráfica lineal: no es solo la representación de una función lineal que pasa por dos puntos, o su representación analítica; su uso contextual, sus elementos –como la pendiente y las intersecciones con los ejes– tienen también significados situados. Podemos entonces reconocer factible el cambio en el discurso matemático escolar de los objetos hacia las prácticas, pues son estas las que favorecen el uso del conocimiento matemático. En un contexto como la ingeniería, en el que la matemática se considera como una aplicación, favorecer usos y desarrollo intencional de prácticas plantea un cambio epistemológico. Es su uso al seno de una comunidad el que manifiesta un conocimiento matemático funcional.

En ese cambio, es factible entonces considerar al conocimiento matemático no como una acumulación de conocimientos: un conjunto de funciones cuyas gráficas podremos ir obteniendo. Más bien se trata de reconocer el uso situacional a lo largo de la escuela y proponer significaciones progresivas en los estudiantes: un objeto matemático no se aprende de una vez y para siempre; una gráfica lineal no es solo un tema para abordar en nivel básico y con ello ya se cumple el objetivo didáctico.

Si queremos proponer un desarrollo del pensamiento matemático, nuestra propuesta es hacia la resignificación continua de la matemática escolar considerando su uso en los diferentes escenarios educativos. En particular para las funciones y sus gráficas, esta resignificación reconoce las diferentes formas y funcionamientos de dicha gráfica desarrollándose a la luz de las nociones matemáticas involucradas –en una relación dialéctica– y, por lo tanto, se puede hablar de un desarrollo del pensamiento matemático en el aula.

Referencias

Aragón-Briceño, C., Ponce, C., Coronado, V. y Giacomán, G. (2011). Evaluación de un método analítico para la determinación de níquel y plomo en sedimento de mar por espectroscopía de absorción atómico. *Ingeniería. Revista Académica de la Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Yucatán*, *15*(1), 1-8.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meanings as a didactical task: The concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose y P. Olivero, *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-82). Nueva York, Estados Unidos: Mathematics Education Library Springer.

Buendía, G. (2010). Una revisión socioepistemológica acerca del uso de las gráficas. En G. Buendía, *A diez años del posgrado en línea en Matemática Educativa en el Instituto Politécnico Nacional* (pp. 21-40). Ciudad de México, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, *24*(2), 9-36.

Buendía, G. y Montiel, G. (2011). From History to Research in Mathematics Education: Socio-epistemological elements for trigonometric function. En V. Katz y C. Tzanakis, *Recent*

Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education (pp. 65-80). Washington, D.C., Estados Unidos: Mathematical Association of America.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama, A. Romo, *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 285-309). Ciudad de México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC, Díaz de Santos.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(2), 187-214.

Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L.M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero, A.R. Hernández, *Razonamiento matemático. Epistemología de la imaginación. (Re) pensando el papel de la epistemología educativa* (pp. 377-399). México: Gedisa, Cinvestav.

Cordero, F., Solís, M., Buendía, G., Mendoza, J. y Zaldívar, J.D. (2016), *El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentación gráfica*, Ciudad de México, México: Gedisa.

Garay-Tinoco, J., Ramírez, G., Betancourt, J., Marín, B., Cadavid, B., Panizzo, L. y Franco, A. (2003). *Manual de técnicas analíticas para la determinación de parámetros fisicoquímicos y contaminantes marinos: aguas, sedimentos y organismos* (serie Documentos generales 13). Recuperado de http://www.invemar.org.co/redcostera1/invemar/docs/7010manualTecnicasanaliticas.pdf

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Nueva York, Estados Unidos: Cambridge University Press.

Loría, J. (2013). *Programación de obras con la técnica de líneas de balance*. Recuperado de http://www.ai.org.mx/ai/archivos/coloquios/regional-zona7/Programacion%20de%20Obras%20con%20la%20Tecnica%20de%20la%20Linea%20de%20Balance.pdf

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo, *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones* (pp. 61-88). Ciudad de México, México: Lectorum.

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar.* Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(4-II), 319-333.

Tuyub, I. y Cantoral, R. (2012). Construcción social de conocimiento matemático: obtención de genes en una práctica toxicológica. *Boletim de Educação Matemática*, *26*(42), 311-328.

Tuyub, I., Martínez, G. y Buendía, G. (2011). La comunidad de formación científica hacia una comunidad de práctica. En G. Buendía, *Reflexión e investigación en matemática educativa* (pp.159- 190). Ciudad de México, México: Lectorum.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona, España: Paidós.

Zaldívar, D. y Cordero, F. (2012). Un estudio socioepistemológico de lo estable: consideraciones en un marco de la divulgación del conocimiento matemático. En O. Covián, Y. Chávez, J. López, M. Méndez y A. Oktaç, *Memorias del Primer Coloquio de Doctorado*, (pp. 203-212). Ciudad de México, México: Cinvestav.

Reconstitución de prácticas sociales de modelación: lo lineal a partir de análisis químicos El caso de la curva de calibración

Reconstitution of social practices of modeling: The linear from chemical analysis The case of the calibration curve

GALICIA SOSA Adriana
LANDA HABANA Lorena
CABRERA GALICIA Alfonso Rafael

Recibido: agosto 20 de 2017 | Aceptado para publicación: octubre 12 de 2017.

Resumen

Una preocupación que compartimos es que el aprendizaje de las matemáticas se vive de manera descontextualizada. Desde construir matemáticas nos desplazamos a contribuir a formar profesionales, constituyendo una matemática relevante. Este trabajo se realiza en la comunidad de

Adriana Galicia Sosa. Docente de tiempo completo en el Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Acapulco. Ingeniera bioquímica, maestría y doctorado en Matemática Educativa. Experiencia como docente por 22 años en licenciatura y posgrado. Responsable y colaboradora de seis proyectos de investigación nacional e internacional. Dirección y asesoría de más de 18 tesis de licenciatura y posgrado. Perfil Promep 2012-2014 y miembro del padrón estatal de investigadores. Coautora de más de 14 publicaciones internacionales arbitradas. Tiene dos reconocimientos nacionales como asesora de proyectos. Líder de la línea de investigación: docencia y aprendizaje. Correo electrónico: agsosa2001@yahoo.com.mx.

Lorena Landa Habana. Docente en el Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico de Acapulco. Es Ingeniera bioquímica y cuenta con maestría en Matemática Educativa. Experiencia profesional en control de calidad de alimentos y como docente por 13 años en programas de licenciatura. Colaboradora de cuatro proyectos de investigación. Asesora de más de 15 tesis de licenciatura. Coautora en ocho publicaciones internacionales arbitradas. Reconocimiento nacional a la mejor tesis de licenciatura por la Sedesol 2004. Miembro de la línea de investigación: docencia y aprendizaje del Tecnológico Nacional de México. Correo electrónico: lorena_landa_habana@yahoo.com.mx.

Alfonso Rafael Cabrera Galicia. Es docente en la Universidad Politécnica de Puebla, México. Cuenta con estudios como ingeniero en Electrónica con especialidad en Sistemas Digitales y tiene una maestría en Ciencias de la Electrónica en Diseño de Circuitos Integrados. Experiencia docente en licenciatura de un año. Coautor de un artículo en el Congreso Internacional IEEE 2017. Correo electrónico: alfonso_cabrera@outlook.com.

ingenieros bioquímicos y tiene como objetivo estudiar la práctica espectrofotométrica: curva de calibración en la escuela y en un laboratorio de investigación desde un enfoque socioepistemológico. El análisis de las formas en que se ejerce la práctica espectrofotométrica se llevó a cabo considerando las dimensiones: procedimientos, intenciones, herramientas y argumentos de quienes la ejercen. Estas dimensiones se evidencian por las formas en que quien ejerce la práctica, articula el modelo con lo modelado, configurando un dipolo modélico. Vía la deconstrucción como acercamiento metodológico, se caracteriza la práctica para la elaboración de un diseño de aprendizaje. En la aplicación de este diseño se muestra el actuar de los estudiantes en la construcción de la curva de calibración, se muestran evidencias de cómo los estudiantes identifican primeramente la necesidad de ajustar linealmente los datos, articulando el modelo gráfico, logrando además diversas formas de predicción usando la regla de tres y el modelo algebraico. El estudiante descentró un dipolo constituido basado en procesos algorítmicos incorporando un nuevo dipolo basado en el análisis de los datos experimentales. Robusteció su forma de interpretar resultados en la práctica espectrofotométrica, reconstituyendo así su práctica.

Palabras clave: DECONSTRUCCIÓN, PRÁCTICA, MODELACIÓN, ANÁLISIS QUÍMICO.

Abstract

Our main concern is that the learning of mathematics could be experienced out of context. Because of this, we move from building the math foundations of our undergraduate students to their technical preparation; by this way, we establish a relevant math background in them. This work was developed inside the biochemical engineers' community and it studies the technical practice of the spectrophotometry with emphasis in the calibration curve topic. The analysis of the ways in which the practice of the spectrophotometry is done was made under the consideration of the next dimensions: procedures, intentions, tools and the arguments of the ones who used them. This dimensions are uncover by the way in which the one who apply the practice of the spectrophotometry ties together the mathematical model of the physical phenomenon with the model obtained in the practice; the consequence is the setting of a model dipole. It is through the use of deconstruction, as an approximation method, that the practice of spectrophotometry has been characterized with the objective to elaborate a learning design. By applying this learning design, the acting of the students in the construction of the calibration curve is shown as well as the evidences of how they identify the necessity to adjust the data in a linear manner articulating a graphical model, obtaining different ways of prediction by using the three rules, the algebraic model or the graphical one. It is in this way that the student can achieve a strengthening of his interpretation of the practice of the spectrophotometry, reconstructing its practice.

Key words: DECONSTRUCTION, PRACTICE, MODELING, CHEMICAL ANALYSIS.

Introducción

El objetivo principal de este trabajo se ubica alrededor de una formación integral del estudiante, particularmente de Ingeniería Bioquímica. En la universidad el estudiante requiere cursar inicialmente asignaturas del campo de las ciencias básicas los dos primeros años, con la promesa de que las matemáticas le serán "útiles" para el ejercicio de la ingeniería. Las prácticas han sido constituidas de tal forma que realizan procesos algorítmicamente; en caso de existir situaciones emergentes a nivel de procesos de laboratorio, el estudiante no siempre resuelve de la mejor manera, no hacen uso de las herramientas matemáticas. Tampoco reconocen usarlas en sus procesos.

En este sentido, nuestra investigación es situada[1] dentro de un contexto, en comunidades, pretendiendo obtener resultados considerando el tiempo y el espacio, con impactos inmediatos en su entorno.

En esta investigación consideramos relevante estudiar las prácticas de modelación del ingeniero bioquímico y las del aula de matemáticas, a fin de tender puentes entre las prácticas de la escuela y las de comunidades del ingeniero bioquímico; particularmente planteamos estudiar la práctica de determinar la concentración de una muestra problema usando el método espectrofotométrico.

En la formación de ingenieros es imprescindible la instrucción práctica; es decir, la participación del estudiante en procesos técnicos y de innovación del campo de su especialización. Esto difícilmente es posible hacerlo circunscrito en el contexto escolarizado. Si bien el estudio desde la escuela, los objetivos, contenidos y métodos de aprendizaje son importantes (Alonso, 2013; Sanhueza, Penalva y Friz, 2013), enseñar en y para la escuela nos aísla de la realidad de la comunidad. En trabajos de matemática educativa, como los de Camacho (2011), Briceño y Buendía (2016), Torres y Montiel (2017), se evidencia la necesidad de estudiar las prácticas de modelación de la ingeniería de comunidades de profesionistas.

Este trabajo considera que atender la formación de ingenieros es mirar más allá del aula, en un horizonte de escenarios donde las prácticas de los

[1] A este respecto coincidimos con Lave y Wegner (1993), Carraher y Schliemann (1993) y Noss, Hoyles y Pozzi (2002), quienes sustentan la idea de realizar investigación situada.

ingenieros tienen intencionalidades propias; trasladarse al lugar donde toman vida las prácticas es aquello que otorga sentido a esta investigación. *Estudiar las prácticas en los diversos escenarios propios de su gestación, en el sitio de su producción,* distinguir las prácticas recurrentes, de las esenciales y secundarias. Tomar aquellos elementos que permitan incorporarse en el contexto escolar, distinguir la búsqueda de elementos como argumentos, herramientas, métodos e intencionalidades que están relacionadas con formas de actuar y pertenecer de comunidades específicas.

Marco teórico: la socioepistemología

La presente investigación se desarrolla en el marco de la socioepistemología. Cantoral y Farfán (2004, p. 139) caracterizan a la socioepistemología como:

> Una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología plantea el examen del conocimiento en sus determinaciones sociales, históricas y culturales.

El estudio de prácticas para la socioepistemología privilegia su intervención en el contexto escolar.

Por otra parte, Arrieta (2003, p. 63) resalta explícitamente las características de práctica de la siguiente manera:

> El concepto de "práctica" connota hacer algo, pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido, la práctica es siempre una práctica social. Este concepto de práctica incluye tanto los aspectos explícitos como los implícitos. Incluye lo que se dice y lo que se calla. Lo que se presenta y lo que se da por supuesto. Incluye el lenguaje, los instrumentos, los documentos, las imágenes, los símbolos, los roles definidos, los criterios especificados, los procedimientos codificados, las regulaciones y los contratos que las diversas prácticas determinan para una variedad de propósitos.

Es decir, realizar una actividad humana en que se fundamentan y explicitan las intenciones de su ejercicio, en un tiempo, en un espacio, en contextos socioculturalmente construidos.

El dipolo modélico

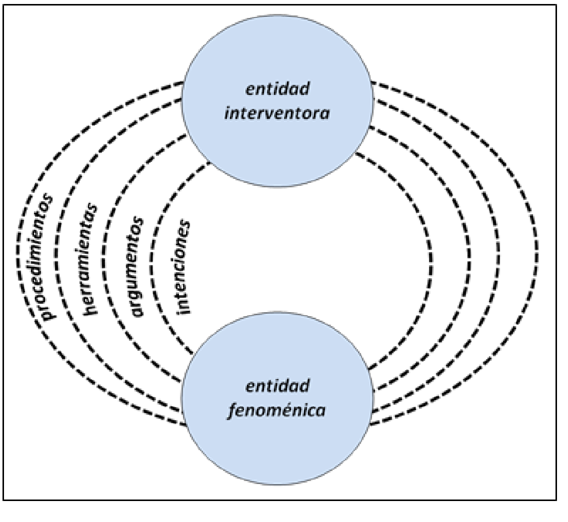
El estudio de las prácticas de modelación de comunidades es complejo. Se precisa de entidades que nos permitan analizar las formas de ejercer la práctica de modelar.

En términos de Arrieta y Díaz (2014), la modelación es una práctica de articulación de dos entes para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado el modelo. El ente se convierte en modelo cuando el actor lo usa para intervenir en el otro ente, por lo que deviene en herramienta.

La articulación de un ente inicial, un modelo con otro ente, lo modelado da lugar a una nueva entidad a la que se denomina dipolo modélico. En la configuración de este dipolo modélico intervienen los argumentos que se esgrimen, las herramientas que se utilizan, los procedimientos y las intenciones. Es decir, de la práctica de modelación emergen dipolos modélicos conformados por dos polos (esferas) y finas corrientes de atracción: los argumentos, las herramientas, las intenciones y los procedimientos. Estas fuerzas de atracción viven tensionando el modelo con lo modelado. En esta tensión distinguimos la atracción entre los polos sobre la separación (figura 1). Ahora bien, la articulación de estos polos se produce en el ejercicio de prácticas de modelación; es decir, la entidad fenoménica como el fenómeno químico, físico, biológico o social, entre otros y el modelo matemático en uso como la entidad interventora que entra en acción sobre el fenómeno (Galicia, 2014).

En este trabajo nos interesa mostrar cómo vive la práctica social de modelación al construir la curva de calibración que se utiliza para determinar la concentración de una muestra problema usando el método espectrofotométrico en la comunidad de investigadores y estudiantes de Ingeniería Bioquímica para el diseño de aprendizajes.

Fig. 1. Diagrama dipolo modélico.



Para ello se precisa deconstruir la práctica social de modelación del análisis espectrofotométrico, identificando la configuración de dipolos modélicos primeramente estudiantes de sexto semestre ejerciendo la práctica, ya que estos tienen conocimiento de la espectrofotometría, linealidad y estadística. Asimismo, también es necesario identificar la configuración dipolo modélica del investigador por su experiencia en un contexto no escolar. Finalmente, después de haber identificado la constitución de la práctica en estas comunidades, se requiere reconstituir la práctica social de modelación del análisis espectrofotométrico en la escuela poniendo en escena un diseño de aprendizaje con estudiantes de primer semestre, toda vez que los estudiantes de este nivel ya han aplicado algorítmicamente y con ejemplos hipotéticos la linealidad. Por otra parte, aunque algunos estudiantes ya han ejercido en nivel medio superior la práctica espectrofotométrica, no habían analizado el comportamiento de los datos.

Deconstrucción evoca al término creado por Jacques Derrida (2008), quien afirma que deconstruir no es regresar hacia un elemento simple, y tampoco es destruir. Insinúa que ello implica reconstruir cuando explica que deconstruir es desestructurar para entender. Derrida nos habla de la deconstrucción como una manera de señalar las premisas de construcción de algo. Insertarse en sus sistemas de construcción o para señalar los elementos dentro de un montaje y lo problemáticos que son.

Se considera a la deconstrucción como un concepto de naturaleza crítica, que define el todo de un sistema en función de la tensión establecida entre sus partes, imaginando dicho sistema como algo abierto, extenso, desdibujado, equívoco y siempre contradictorio consigo mismo (Krieger, 2004).

La extensión de la perspectiva deconstructivista hacia ámbitos disciplinarios, como la física, la química y las matemáticas en su aplicación, intenta poner en evidencia la tendencia, generalmente involuntaria, de fijar el análisis de interpretación o la lectura como un sistema lineal y cerrado que termina por aniquilar las posibilidades creativas.

Por ello, una lectura deconstructivista debe centrar su atención en ambigüedades, ironías, silencios, antinomias, alegorías y coincidencias de los discursos; es decir, la labor de análisis debe orientarse hacia un conjunto de aspectos, rasgos o elementos antes considerados subjetivos o azarosos. La deconstrucción es una invitación a invertir la jerarquía de nuestra percepción y valoración, mismas que han terminado por convertirse en costumbre intelectual. La deconstrucción como actividad comprensiva busca crear el caos mental necesario para la creatividad en el cual nuestra mente cambie y organice nuestra percepción de la realidad de otra manera.

En esta investigación se toman los elementos teóricos de la deconstrucción para adecuarlos a unas etapas de investigación. El propósito es estudiar las prácticas socialmente constituidas de diversas comunidades y la intención de incorporarlas ulteriormente a los sistemas escolares.

Desde nuestra aproximación, la deconstrucción de las prácticas que viven en escenarios particulares da la pauta que han de seguir intervenciones en el aula mediante diseños de aprendizaje basados en estas prácticas. Esta pauta es una trayectoria que marca la construcción de entidades, llamados dipolos modélicos, los que transitan desde dipolos simples hasta más complejos.

Metodología y procesos de desarrollo

Deconstrucción de prácticas. Hacia una metodología de investigación de prácticas sociales

Para investigar las prácticas se precisa estudiarlas en los diversos escenarios propios de su gestación. Estudiar las prácticas que son ejercidas y compartidas por una comunidad profesional implica el desarrollo de una serie de actividades que por sus características no es posible sean atendidas por un método en particular.

Como acercamiento metodológico se plantean tres etapas cuya flexibilidad entre las actividades de cada una de estas promueven la retroalimentación de las mismas, a fin de que las evidencias, análisis y construcciones, entre otras cosas, sean lo más nítidas posible.

Así, en la medida en que la investigación de la práctica vaya develando aquellos elementos constitutivos esenciales que den luz sobre la configuración del dipolo modélico (modelo/modelado), estas etapas irán robusteciendo la red que configura la práctica con base en la vivencia de quienes la ejercen en escenarios particulares.

A continuación se describen las etapas que se desarrollaron para la investigación de prácticas.

Etapa I. La práctica legítima y su colindancia

En esta etapa se proyecta a la comunidad y sus prácticas a estudiar, así como aquellas prácticas colindantes a esta, promoviendo así la distinción en problemáticas que atienden y formas de filiación. Se plantean tres fases.

Fase 1. Identificación de la comunidad en estudio

Se precisa conocer la historia de la comunidad, el perfil profesional, laboral o artesanal. Para comunidades de profesionales se precisa además conocer los objetivos y el currículo de la profesión, así como analizar artículos científicos en acompañamiento con expertos en el tema. Es decir, en esta fase se investigan los antecedentes teóricos de la comunidad en estudio para conocer qué tipo de problemáticas atienden.

Fase 2. Reconocimiento de los escenarios

Es esencial identificar los espacios en que viven las prácticas de comunidades específicas. La infraestructura necesaria, el equipamiento así como las condiciones ambientales de estos espacios.

Fase 3. Identificación y clasificación de prácticas sociales recurrentes

Se identifican las problemáticas atendidas con la asesoría de profesionistas, investigadores, profesores y personas con experiencia de la comunidad en estudio. Se caracteriza la complejidad de ejercer la práctica y el conocimiento previo que requiere.

En esta fase se realiza un estudio *in situ* de las prácticas recurrentes. Se observa cómo los actores ejercen sus prácticas, incluyendo a los actores en formación. Se precisa de conocimiento teórico general previo de la actividad a observar. Se levantan videos y audiograbaciones, así como notas de campo en el estudio. Posteriormente se realiza el análisis de la información. Esta fase requiere contar con la asesoría de profesionistas de la comunidad que no formen parte del grupo de la investigación.

Se procede a esquematizar las prácticas identificadas y se selecciona aquella que se va a deconstruir. En este proceso de selección influyen diversos factores. Uno de estos tiene que ver con la calidad de evidencias levantadas, por lo que en esta fase es recomendable en una primera mirada hacer levantamientos en la observación y en una segunda o tercera mirada interactuar con quienes ejercen la práctica en una especie de validación de la información levantada. Otro factor determinante en la selección de la práctica a estudiar tiene que ver con que los elementos recabados aporten información para el diseño de una secuencia didáctica; es decir, seleccionar aquella práctica que permita su reconstitución en el aula de matemáticas.

Etapa II. De prácticas constituidas a su deconstrucción

En esta etapa se estudia la práctica seleccionada y que ha sido aceptada y normada por la comunidad y es ejercida cotidianamente, perdiendo la intencionalidad que la generó, sin que se cuestione su ejercicio. Para ello se plantean dos fases.

Fase 1. Deconstrucción de la práctica seleccionada

El propósito de esta fase es desestructurar para comprender las formas de configuración del dipolo y el papel de la matemática como herramienta, por lo que se realiza una revisión histórica de las entidades en práctica. Posteriormente se sitúa la práctica y sus herramientas matemáticas en el currículo para ubicarla en la escuela.

Como parte de la deconstrucción se interactúa con quienes ejercen la práctica y se investiga por qué ejercen la práctica de la forma en que lo realizan. Esta interacción se realiza ya teniendo un conocimiento previo de la práctica en estudio.

Esta parte de la deconstrucción es entendida como el regreso al sitio para realizar una mirada fina del ejercicio de la práctica. Aquí también se conoce el qué hace, se busca el cómo lo hace. Nuevamente es importante contar con la asesoría de expertos en el área.

Esta etapa es fundamental en el acopio de elementos para el ulterior diseño del aprendizaje basado en prácticas. Por la profundidad con que se deconstruya la práctica es posible construir diseños de aprendizaje que incidan en las competencias específicas que se pretende formar en el estudiante.

Fase 2. Caracterización de prácticas desde la configuración del dipolo modélico

Caracterizar la práctica contribuye a la fase de deconstrucción mirando la relación entre la experiencia y la intencionalidad que subyace al ser ejercida. Se analiza la relación entre los elementos de constitución; es decir, entre las argumentaciones que se esgrimen, las herramientas que se utilizan, los procedimientos y las intenciones que moviliza quien ejerce la práctica en un acercamiento a caracterizar la práctica desde la configuración de dipolos modélicos.

Etapa III. Reconstitución de la práctica en la escuela

Una vez deconstruida la práctica en estudio, se elabora un diseño de aprendizaje que rescate los elementos constitutivos de la práctica que contribuyan al proceso de aprendizaje del estudiante. Es decir, que propicien la descentración del dipolo modélico en el estudiante, que se cuestione y haga uso de nuevas herramientas y procedimientos, que enriquezca la argumentación de su ejercicio. Con el diseño de aprendizaje se pretende que el estudiante construya intencionalidades, el "saber por qué y cómo se hace". A la descentración del dipolo modélico en el estudiante le hemos llamado reconstitución de la práctica escolar, desde el sentido en que el estudiante reconstituye un dipolo que ya tenía constituido, posibilita su remplazo o enriquecimiento en su caso, de la red que configura el propio estudiante de la práctica.

Cuando elaboramos diseños de aprendizaje basados en prácticas de modelación, estos los estructuramos considerando al menos cuatro fases.

Fase 0. Condiciones generales del diseño

En esta fase se establecen las condiciones generales para la elaboración del diseño. Estas condiciones tienen que ver con la propia conformación y el rol del grupo de personas participantes en la investigación, así como aspectos técnicos de preparación de materiales y medios de acopio de información.

Se establecen en esa fase los objetivos del diseño con énfasis en la matemática como herramienta para el ejercicio de la práctica y no como objeto. De acuerdo con la información obtenida en la segunda etapa se selecciona al grupo de estudio y se les aplica una encuesta que proporcione información general, académica y social.

En esta fase también se establece la configuración del dipolo que se espera reconstituya el estudiante, los elementos que se pretenden aparezcan en escena sin pretensión de lograr una reproducción fiel, sino más bien inducir el desplazamiento y levantar las evidencias para su posterior análisis.

Fase 1. La interacción con el fenómeno, la experimentación

La experimentación puede plantearse en tres ambientes. Los datos se obtienen, en el presencial, desde la experimentación directa con el fenómeno; en el virtual, recurriendo a simulaciones del fenómeno con aplicaciones informáticas; y en el discursivo donde la experimentación se establece desde el discurso utilizando datos iniciales.

En esta fase se plantean situaciones que lleven al actor a articular las dos entidades en cuestión, la que se intenta intervenir con la entidad interventora.

La naturaleza de la experimentación al modelar radica en la potencia que imprime la articulación y la intencionalidad de intervenir. Esto implica la necesidad de interactuar con la entidad en la que se desea intervenir; es decir, la necesidad de la experimentación en sentido amplio. Sin embargo, la interacción con lo que se pretende modelar, la experimentación en sentido amplio, no es suficiente para caracterizar a las prácticas de modelación; esta suficiencia se establece con el acto de *articular dos entes* con la intención de intervenir en uno a partir del otro.

La intervención puede ser de diferente índole; algunas de ellas es la predicción, el diagnóstico, la planeación o la evaluación.

Fase 2. La configuración inicial del dipolo modélico del estudiante

En esta fase del diseño se pretende que los estudiantes articulen sus argumentos, intenciones, procedimientos y herramientas, develando el dipolo modélico que ya tiene configurado en su práctica constituida. Es preciso señalar que en el proceso de deconstrucción, que implica mirar las configuraciones modélicas de comunidades no escolares, también conlleva a estudiar estas configuraciones en estudiantes en el contexto escolar. Así que, previo al intento de desplazamiento, se prescinde que el estudiante exponga las formas como ha constituido la práctica; a esto le llamamos configuración inicial para efecto de la actividad didáctica. No es recomendable que estos estudiantes sean los mismos que se referencian en la deconstrucción, a fin de evitar la predisposición en el desarrollo de la actividad, ya que se requerirían dos sesiones.

Fase 3. La descentración del dipolo modélico en el estudiante

En el desplazamiento del dipolo modélico, las actividades son inducidas a que el estudiante busque nuevas formas de solución, de abordar el experimento o la problemática planteada.

En esta fase se pretende inducir la configuración de un nuevo dipolo modélico que permita al estudiante, por una parte, reconocer la herramienta matemática en uso, y por otra parte su manipulación. Las intenciones son las que se inducen en la puesta en escena; es decir, se espera que la intención del estudiante sea ejercer y comprender la práctica.

Las etapas desarrolladas en esta investigación no pretenden ser una secuencia de actividades para investigar prácticas. En principio, el desarrollo de las etapas se dan en función del alcance de cada investigación y del equipo de trabajo, entre otros aspectos.

Resultados

Etapa I. El análisis químico por espectrofotometría

La comunidad de ingenieros bioquímicos

Situamos esta investigación en comunidades de ingenieros bioquímicos. En la formación de esta comunidad se espera que el egresado diseñe, controle, simule y optimice equipos, procesos y tecnologías sustentables que utilicen recursos bióticos y sus derivados para la producción de bienes y servicios que contribuyan a elevar el nivel de vida de la sociedad.

Se requiere cursar nueve semestres con un total de 260 créditos, de los cuales 210 corresponden al área genérica, 25 al módulo de especialidad, para las residencias profesionales y el servicio social corresponden 10 créditos a cada actividad y 5 a otros cursos que incluyen asistencia a congresos y actividades deportivas y culturales (Tecnológico Nacional de México, 2017).

El ingeniero bioquímico se caracteriza por su actividad en el laboratorio y la experimentación. Así, en los diversos escenarios de su pertenencia, en el laboratorio preparan soluciones y realizan análisis cualitativos y cuantitativos de corte biológico, químico y físico. En muchas de estas prácticas, la espectrofotometría es una práctica recurrente fundamental para posteriores procesos.

La espectrofotometría

En esta etapa se hace una revisión del plan de estudio, la retícula y los contenidos de los programas de estudio. Asimismo, esta etapa se fortalece con el reconocimiento de los escenarios escolares y con entrevistas a profesores y personal administrativo. Es posible clasificar las prácticas del ingeniero bioquímico por la complejidad de la entidad matemática presente en los diversos fenómenos en los que intervienen como entidades primarias, entidades compuestas y entidades ad hoc.

De la diversidad de prácticas de modelación que en la formación de ingenieros bioquímicos se contemplan, es en esta etapa donde se selecciona una práctica que, por su uso y posibilidad de ser reconstruida en el laboratorio escolar para el aprendizaje de las matemáticas, nos centramos en la espectrofotometría.

La espectrofotometría es uno de los métodos de análisis óptico más usado en la comunidad de ingenieros bioquímico. El espectrofotómetro es un instrumento que permite comparar la radiación absorbida o transmitida por una solución que contiene una cantidad desconocida de soluto y una que contiene una cantidad conocida de la misma sustancia. Este fenómeno es de carácter lineal.

En el análisis químico cuantitativo, un procedimiento recurrente es la elaboración de la curva de calibración, o curva patrón. Esta curva es la representación gráfica de una señal que se mide en función de la concentración de un analito. La calibración incluye la selección de un modelo para estimar los parámetros que permitan determinar la linealidad de esa curva y, en consecuencia, la capacidad de un método analítico para obtener resultados que sean directamente proporcionales a la concentración de un compuesto en una muestra, dentro de un determinado intervalo de trabajo.

En este procedimiento se compara una propiedad del analito con la de estándares de concentración conocida del mismo analito (o de algún otro con propiedades muy similares a este). Para realizar la curva de calibración frecuentemente se requiere el espectrofotómetro.

Para la calibración analítica se construye un modelo lineal ajustado a partir de una serie de n puntos experimentales, donde cada punto se encuentra definido por la concentración como variable x y una variable y como la absorbancia. La recta de calibrado se encuentra definida por una ordenada al origen (b) y una pendiente (m), mediante la ecuación $y = \mathrm{m}x + \mathrm{b}$.

A partir de la curva de calibración (conjunto de concentraciones que describen el intervalo en el cual se deberá cuantificar el compuesto por analizar), y a fin de asegurar que la recta encontrada con los puntos experimentales se ajuste correctamente al modelo matemático de la ecuación, se calculan los valores de la ordenada al origen, la pendiente y el coeficiente de determinación (R^2). Generalmente se utiliza el método de mínimos cuadrados.

En la práctica, para construir la curva de calibración se utilizan disoluciones que contienen concentraciones conocidas de analito, llamadas disoluciones patrón o estándar. Los estándares o disoluciones patrón para construir la recta de calibrado deben ser preparadas en forma independiente a partir de una o varias soluciones madre; o se utilizan estándares trazados en laboratorios de metrología.

Se requieren por los menos cinco datos (lecturas) para que la curva sea confiable, que la variabilidad sea mínima y el intervalo lineal sea suficiente; sin embargo, entre más datos se obtengan la confiabilidad será mayor.

Cabe mencionar que en la práctica es muy importante efectuar la lectura del “blanco”. Se llaman disoluciones blanco o simplemente blancos a las disoluciones que contienen todos los reactivos y disolventes usados en el análisis, pero sin el analito. Los blancos miden la respuesta del procedimiento analítico a las impurezas o especies interferentes que existan en los reactivos.

La espectrofotometría in situ: una práctica recurrente

El tema de espectrofotometría como técnica de análisis se aborda en la asignatura de Química Analítica II en quinto semestre. Los estudiantes tienen conocimiento que teóricamente es un fenómeno físico de comportamiento lineal, así como la importancia del coeficiente de correlación, métodos de ajuste de la curva y el error fotométrico.

Esta técnica es utilizada en posteriores asignaturas. Por ejemplo, en Microbiología de Alimentos e Ingeniería de Biorreactores es utilizada para el conteo de levaduras, construyendo una curva de calibración de McFarland o preparando soluciones de microorganismos de concentración conocida.

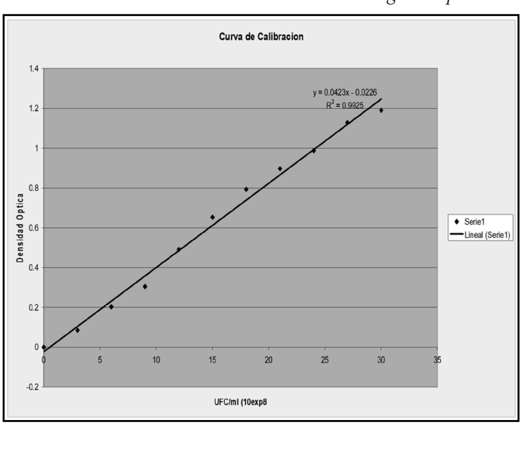
Existen reportes de prácticas en los que se utiliza la curva de calibración aplicando regresión lineal y en los que se hacen las lecturas interpolando directamente a partir de los resultados obtenidos (figura 2).

En una planta de tratamiento de agua potable se realizan determinaciones de sólidos suspendidos utilizando la espectrofotometría. Una de las actividades del ingeniero bioquímico en una planta embotelladora de bebidas carbonatadas, para el caso de bebidas sin azúcar, precisan determinar cada media hora la concentración de azúcar en el tanque de jarabe, y por ser una bebida que no debe contener trazas de este compuesto requieren cada tres horas como mínimo construir la curva de calibración. En esta industria se utilizan soluciones ya estandarizadas por la compañía trasnacional, por lo que el coeficiente de determinación está por arriba del 0.98; los ingenieros bioquímicos hacen uso del programa Excel.

Respecto a una investigación que se realiza en el mejoramiento de producción de bebidas alcohólicas destiladas de agave, se determinan los azúcares reductores por espectrofotometría y realizan las curvas patrón aplicando regresión lineal por mínimos cuadrados; los investigadores también hacen uso de estándares trazados (figura 3).

Por otra parte, en diversos artículos presentados en las diversas versiones del Congreso Internacional de Ingeniería Bioquímica organizadas por el Colegio Mexicano de Ingenieros Bioquímicos, así como en reportes de residencias profesionales, es posible observar el uso de la espectrofotometría como técnica cuantitativa y al espectrofotómetro de luz ultravioleta-visible, absorción atómica e infrarrojo como el equipo utilizado. Por ejemplo, García y Montero (2010) realizaron la determinación de fenilalanina, tirosina y triptófano, haciendo lecturas en el espectrofotómetro UV-visible a diversas longitudes de onda, método propuesto por Block y Bolling. Cabe mencionar que no en todos los reportes se hace explícito el uso del espectrofotómetro, ya que generalmente se hace referencia a una metodología desarrollada por otros investigadores o a normas oficiales mexicanas (NOM) y de la Asociación de las Comunidades Analíticas (AOAC Internacional).

Fig. 2. Reporte de estudiantes.



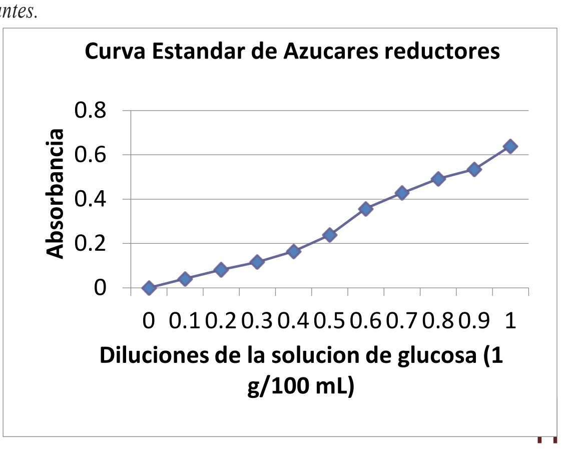
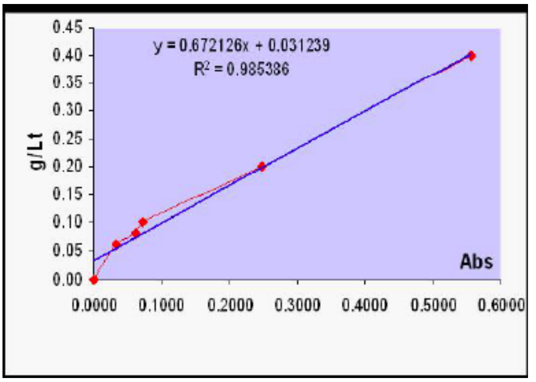


Fig. 3. Gráfico de azúcares.



Esquematización de la práctica espectrofotométrica

Luego de observar dónde y cómo es usada la espectrofotometría, se esquematizó de manera general el proceso que se sigue en el ejercicio de esta práctica (figura 4).

Etapa II. De la constitución a la deconstrucción de prácticas

Deconstrucción de la práctica

Hasta este momento de la investigación solo se ha observado dónde es utilizada la técnica de espectrofotometría, una técnica que a saber de algunos profesionistas y profesores es recurrente; por ello es preciso des-estructurarla para estar en condiciones de identificar los entes matemáticos que dan vida a esta práctica e investigar cómo es que se utiliza, investigar puntualmente. Presentamos en este reporte la deconstrucción parcial de esta práctica. En el trabajo de tesis de Sánchez (2010) se explican los fundamentos de la espectrofotometría que mostramos a continuación.

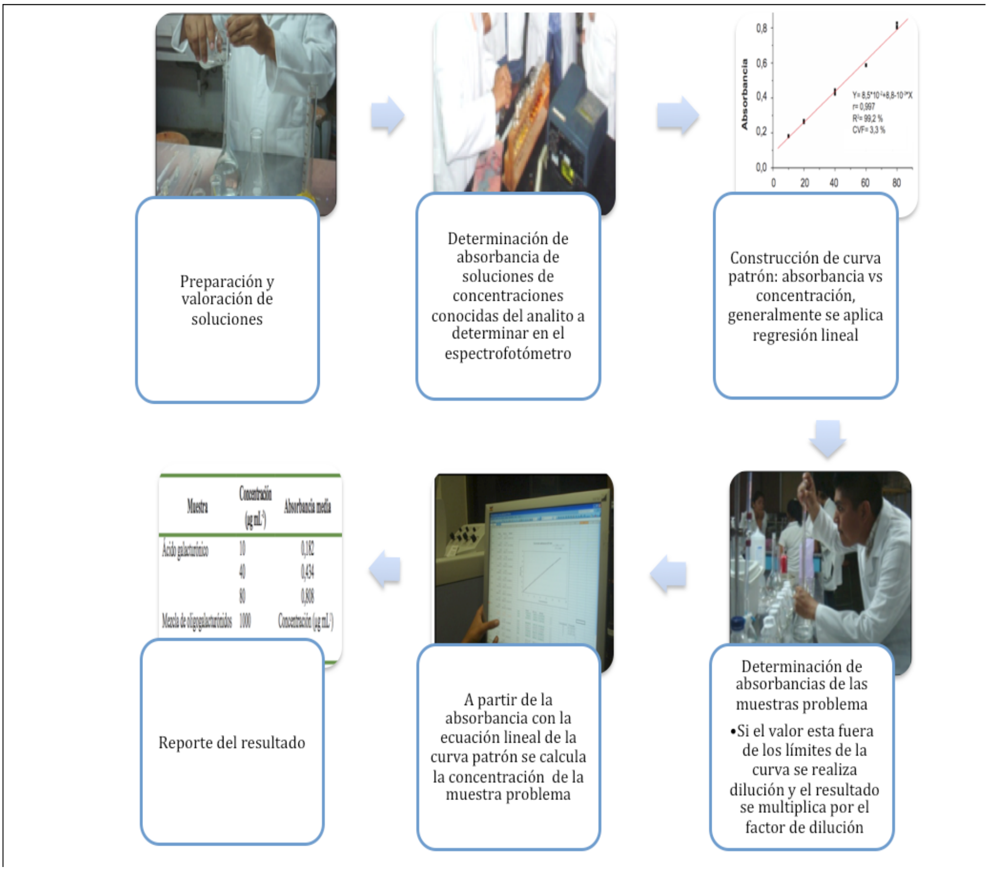
Leyes de la espectrofotometría

Cuando un haz de energía radiante monocromática incide sobre una capa homogénea de una sustancia transparente, parte de la energía es absorbida y el resto transmitida. Si la energía radiante incidente tiene longitudes de onda de la región visible del espectro, y el medio a través del cual tiene que pasar absorbe selectivamente ciertas longitudes de onda, el color observado corresponderá a las longitudes de onda de la energía transmitida.

Ley de Bouguer

Tiene dos partes. En la primera, la energía radiante monocromática transmitida en un medio homogéneo es proporcional a la energía radiante incidente; o bien, la relación entre la energía radiante trasmitida, P, y la incidente, Po, es una constante. En la segunda parte, la constante, T, es la transmitancia definida por P/Po. La energía de

Fig. 4. Esquema de la práctica espectrofotométrica.



radiación en las capas de igual espesor absorben fracciones iguales de energía de una radiación incidente sobre ellas.

Ley de Beer

Expresa la misma relación entre transmitancia y concentración de material absorbente que la ley de Bouguer entre transmitancia y camino óptico; es decir, que para un camino óptico dado, la transmitancia disminuye en progresión geométrica cuando la concentración aumenta en progresión aritmética, por tanto:

$$-\log T = a \times C$$

donde C = concentración, a = absortividad, y también absorbancia por unidad de concentración y unidad de camino óptico.

Por tanto, las leyes fundamentales de la espectrofotometría se obtienen por combinación de la ley de Bouguer con la de Beer, resultando las siguientes relaciones:

$$A = abC = -\log T = -\log(P/Po) = \log(Po/P) = \log(1/T)$$
$$P = Po \times 10 - abC \text{ o } Po = P \times 10abc$$

La forma de estas ecuaciones indica que la representación gráfica de la absorbancia, A (de una sustancia dada a camino óptico constante), en función de la c es una línea recta de pendiente a, y la representación del $log\ T$ contra C, es otra línea recta de pendiente $-a$, en la cual a es la absortividad de la sustancia, con dimensiones de unidades de concentración y camino óptico.

En esta etapa se muestran las diferentes configuraciones de dipolos modélicos constituidos socialmente en comunidades de ingeniería bioquímica.

Dipolo modélico de estudiantes de sexto semestre

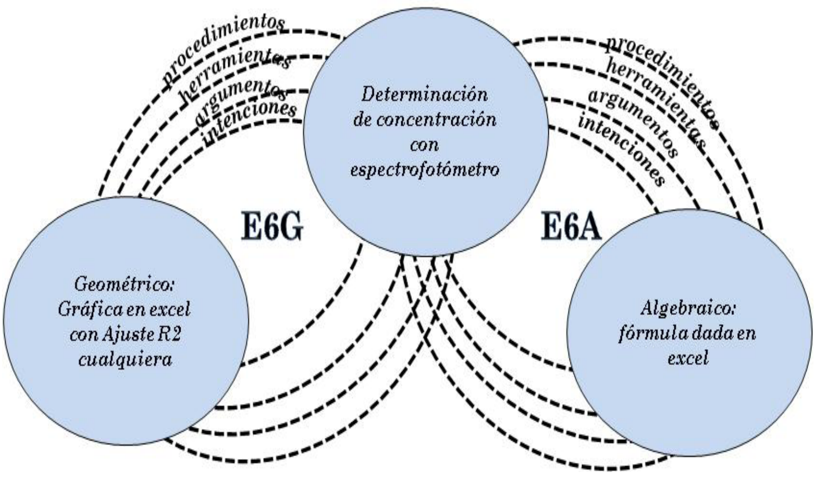
Para esta etapa se participó como observador en la clase de ingeniería de biorreactores, en el momento en que los estudiantes realizaban análisis de glucosa a muestras tomadas cada dos horas durante un proceso de fermentación.

El proceso consiste en realizar una curva patrón preparando soluciones de glucosa a diferentes concentraciones, se les determina la absorbancia con el espectrofotómetro y la relación entre el dato de concentración y el de absorbancia es lineal. Los estudiantes usan Excel y teniendo la recta la ajustan con regresión lineal, configurando el dipolo modélico que llamaremos, para fines de identificación, E6G: modelo geométrico-determinación de concentración con espectrofotómetro (modelo-modelado).

Durante el proceso de fermentación se toman muestras cada dos horas y se hace la lectura en el espectrofotómetro y el dato de absorbancia que se obtiene se traduce a concentración de glucosa al aplicar la ecuación de la recta que arroja la hoja de cálculo de Excel de la previa curva patrón, configurando el dipolo modélico E6A: modelo algebraico-determinación de concentración con espectrofotómetro (modelo-modelado) como se muestra en la figura 5.

Las características del dipolo E6G y E6A se muestran en la tabla 1, distinguiéndose el procedimiento de regresión lineal donde, independientemente del valor de

Fig. 5. Dipolo modélico de estudiantes de sexto semestre.



r^2, el estudiante ajusta la recta. En el estudio de casos, dos de cinco estudiantes comprendieron que estadísticamente no se obtiene un resultado representativo.

Dipolo modélico del investigador

En un laboratorio de investigación se observa el ejercicio de la misma práctica de modelación del estudiante de sexto semestre, y en la primera parte (figura 6), al configurar el dipolo IG: modelo geométrico-determinación de concentración con espectrofotómetro (modelo-modelado), este considera primordial que en el ajuste de la curva patrón se obtenga una r^2 muy cercana a 1. Para ello, a diferencia de los estudiantes, los investigadores precisan de soluciones de concentración comerciales trazadas, equipos de marcas reconocidas y en buen estado, así como experiencia en el manejo de la técnica, ya que se requiere obtener datos confiables. Ya con la curva patrón diseñada, en la obtención de la concentración de la muestra a tratar el investigador configura el dipolo E6A de la misma manera que el estudiante de sexto semestre.

En la tabla 2 se detallan los procedimientos, herramientas, argumentos e intenciones que llevan al investigador a configurar los dipolos IG y E6A.

La caracterización de la práctica espectrofotométrica con estudiantes de semestres avanzados e investigadores reflejadas en las tabla 1 y 2, dio la pauta para el acercamiento a un diseño de aprendizaje en estudiantes de primer semestre. Esto a fin de analizar las configuraciones modélicas en un intento de reconstituir la práctica que *a priori* se consideró no se ejercía diferente a los estudiantes de semestres avanzados.

Etapa III. La reconstitución de la práctica

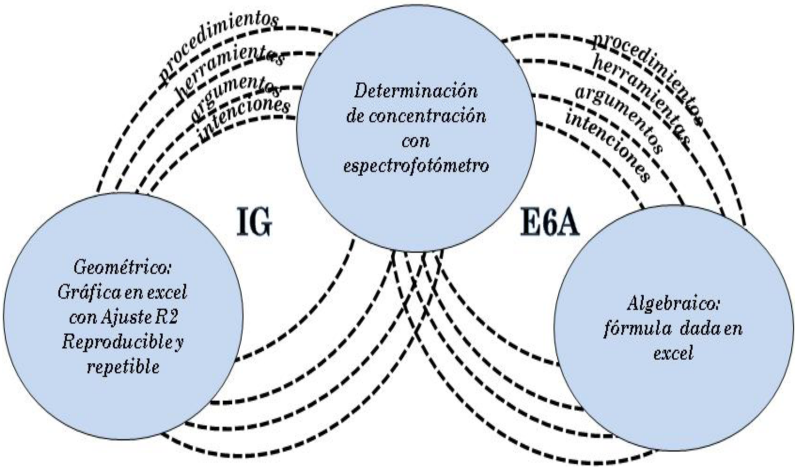
Condiciones generales de diseño de aprendizaje

Derivado del análisis de los resultados obtenidos en la etapa anterior, donde se mira la constitución de una práctica, se elaboró un diseño de aprendizaje en el que el

Tabla 1. Características de los dipolos de estudiantes de sexto semestre E6

Dipolo modélico	Procedimiento	Herramientas	Argumentos	Intención
E6G	Coloca datos en Excel. Modelo lineal ajustando R^2 sin importar el valor de esta.	Geométrico	Lo usa para verificar que es lineal.	Obtener la ecuación lineal.
E6A	Coloca en la fórmula el dato de absorción y despeja de la ecuación lineal de Excel la concentración buscada.	Algebraico	Obtener la ecuación lineal ajustada.	Obtener la concentración de cualquier valor.

Fig. 6. Dipolo modélico del investigador.



estudiante construyera, en el ejercicio de esta práctica, lo lineal y el ajuste lineal, orientado a la intención de comprender los aspectos constitutivos del fenómeno físico de la absorción de luz y su relación con la práctica espectrofotométrica, así como las características de un modelo lineal como herramienta hacia la reconstitución de su práctica.

Los estudiantes que participaron cursan primer semestre de la carrera de Ingeniería Bioquímica. Las edades fluctúan entre los 18 y 20 años. Un aspecto a considerar para la invitación a participar fue el académico. A este respecto podemos comentar que la mayoría de los estudiantes no ha reprobado la asignatura de Matemáticas y la mitad de ellos confiesan que les gustan las matemáticas, afirmando que los motivos por los que reprueba un estudiante en su mayoría se debe a los profesores. Todos los participantes ya habían realizado análisis espectrofotométrico, algunos ya habían construido curvas de calibración y otros solo la habían usado. Todos manifestaron que en la clase de Matemáticas, para el aprendizaje de ecuaciones lineales, el profesor proporcionaba los datos que posteriormente ellos graficaban; otras veces les daban la ecuación y estos sustituían. Algunos recuerdan de la clase de Estadística, que cuando la recta no era exacta, aplicaban unas fórmulas "complicadas" vía calculadora para hacerla recta; solo dos estudiantes de diez manifestaron haber usado el programa Excel para el ajuste de datos, si bien solo les interesaba que el programa proporcionara la fórmula para a partir de esta despejar, otorgándole poca o nula importancia al coeficiente de determinación; es decir, "había que hacerla recta". Todas estas experiencia las obtuvieron en nivel medio superior. En ese sentido, algunos estudiantes tenían constituido el dipolo modélico E6G y E6A, realizando sus actividades algorítmicamente.

En este diseño interesa poner de manifiesto los recursos utilizados en la construcción de las versiones de los estudiantes a través comprobaciones o conjeturas que hagan uso de diferentes herramientas matemáticas, que desarrollen diferentes formas de solución.

Tabla 2. Características de los dipolos del investigador				
Dipolo modélico	**Procedimiento**	**Herramientas**	**Argumentos**	**Intención**
IG	Coloca datos en Excel. Modelo lineal ajustando R^2 con valores cercanos a 1.	Geométrico	Lo usa para verificar que es lineal.	Obtener la ecuación lineal.
E6A	Coloca en la fórmula el dato de absorción y despeja de la ecuación lineal de Excel la concentración buscada.	Algebraico	Obtener la ecuación lineal ajustada reproducible y repetible.	Obtener la concentración de cualquier valor con exactitud.

Se organizaron dos equipos de cinco integrantes cada uno. El primer equipo tomó los datos en el espectrofotómetro con las soluciones ya preparadas por los auxiliares de laboratorio y se trabajó durante cuatro horas. En cada mesa de trabajo se instaló una audiograbadora para captar las discusiones generadas durante la actividad; también se contó con videograbación, permitiéndonos mayor visión de la actividad. Se requirió de papelería y se levantaron notas de las observaciones.

Lo que se espera. Estamos interesados en las formas en que el estudiante aprende y las herramientas que utiliza, individual y colectivamente, induciendo a la retórica a fin de que consensen sus argumentaciones.

Un aspecto central es intentar que el estudiante construya un nuevo dipolo modélico hacia la comprensión de las construcciones lineales. La finalidad es que conozca de manera general cómo funciona la herramienta matemática en la práctica espectrofotométrica.

Deberá entonces descubrir las características propias de los modelos presentes, su generación y la articulación entre estos.

Se espera el desplazamiento del dipolo del estudiante que utiliza los dipolos E6G y E6A hacia la configuración de un nuevo dipolo modélico que permita al estudiante comprender primeramente lo lineal y la importancia del ajuste lineal, en una aproximación al dipolo IG del investigador, toda vez que se realiza la actividad sin el uso de las TICs.

Con la finalidad de que el aspecto de la habilidad en la preparación de soluciones químicas y el tiempo que se requiere para ello, en esta actividad se les proporcionaron las soluciones ya preparadas para que únicamente realizaran las lecturas en el espectrofotómetro e iniciaran con el proceso de modelación numérica al tomar datos.

Como se ha mencionado, esta práctica, si no se realiza con estándares trazados, se espera una dispersión de datos no lineales, por lo que se analiza la actividad en dos escenas.

Un aspecto importante en la investigación es la argumentación discursiva. A continuación se muestran algunos episodios de la puesta en escena del diseño de aprendizaje.

El modelo lineal no ajustado

Identificando el modelo numérico y gráfico.

Profesora: —Describan lo que observaron.

Ángel: —Que la absorbancia va de menor a mayor… en orden cronológico.

Moisés: —O sea que los datos van parejos —señala la tabla.

Ángel: —Bueno… más o menos.

Moisés: —Mira la gráfica: está quebrada.

Johana: —A nosotros nos da más o menos recta.

En este primer episodio los estudiantes numerizan el fenómeno e intentan caracterizar lo lineal con los modelos numérico y gráfico que logran construir. Sin embargo, algunos detectan la necesidad de linealizar los datos conforme a la ley de Lambert-Beer (figura 7).

El ajuste.

Profesora: —Entonces, si la recta no es totalmente lineal, ¿qué se puede hacer?

Martín: —Habrá que meter los puntos que están fuera.

Juan: —Sí, pero, ¿cómo?

Profesora: —¿Qué tal si trazan una recta que pase por la mayoría de los puntos? Cada uno en su gráfica.

…

Profesora: —¿Qué gráfica es la que mejor se ajusta?

Martín: —Parece que la mía.

Juan: —¿Cómo saberlo, si no tengo computadora ni calculadora? Ya no recuerdo la fórmula de regresión.

Profesora: —Midan la distancia que existe entre cada punto y la nueva recta y súmenla.

…

Profesora: —¿Cuál es la mejor recta, la que cuya suma sea menor o la que sea mayor?

Martín: —A simple vista la mía, y es la que sus distancias y la suma de estas es menor.

Johana: —¿Eso hace la fórmula de mínimos cuadrados?

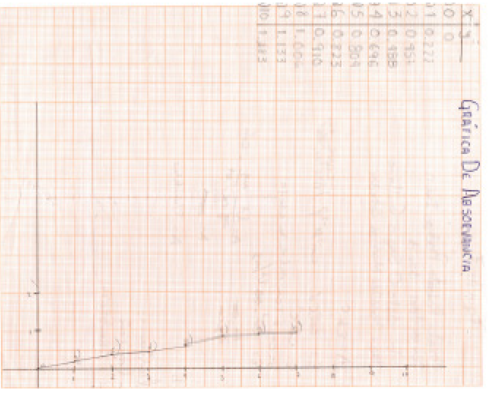
Martín: —¡Qué sorpresa!

Juan: —Y sin tener que memorizar fórmulas ni usar calculadora

Profesora: —Bueno, en realidad es más complejo. Efectivamente, la recta que mejor se ajusta es la de Martín.

En este episodio, los estudiantes hacen bocetos sobre los puntos dispersos y realizan un ajuste utilizando la regla en un acercamiento al ajuste por mínimos cuadrados.

Fig. 7. Gráfica de absorbancia vs. concentración sin ajustar.



El modelo lineal ajustado.

Profesora: —¿Ya podemos usar la curva patrón?

Johana: —A ver, si la recta que sacamos con los datos del espectro no es recta, entonces hay que calcular datos de la nueva recta.

Juan: —Cierto, pero, ¿cómo?

Profesora: —¿Qué cambio observan entre la gráfica nueva y la anterior?

Iván: —Que la nueva sí está recta.

Martín: —Cambia un poco la inclinación, ¿no?

Profesora: —Entonces, ¿cambia la pendiente?

Martin: —¡Sí! Habría que calcular una pendiente nueva para y = mx + b.

Juan: —¿Despejamos y obtenemos cada punto nuevo?

Profesora: —Correcto. Tomen dos puntos para la nueva pendiente para que obtengan la nueva recta.

Martín: —Con $y_2–y_1 / x_2–x_1$

El método de mitades en el uso de la curva patrón construida.

Profesora: —Si tengo una muestra problema, y necesito saber la concentración de glucosa cuya absorbancia es 0.592, ¿qué concentración de glucosa tiene la muestra?

Guadalupe: —No se puede saber con exactitud, porque no obtuvimos el dato; este valor no está en la gráfica… Bueno, está, pero escondido.

Iván: —Este dato es el más cercano, ¿están de acuerdo? —señala la tabla.

Todos: —¡Sí!

Iván: —Qué les parece si hacemos algo más lógico: sacamos la mitad que hay entre estos dos, la tres y la cuatro, y el promedio va a dar más aproximado a eso; igual con la concentración de la glucosa sumamos 30 y 40 y lo dividimos entre dos y nos da el valor: 35.

Guadalupe: —No creo que esté bien.

Nancy: —¡Pero la mayoría gana!

Aquí podemos observar cómo los estudiantes aproximan el valor de la concentración a partir de un valor que se ubica en medio de los valores de absorbancia determinada durante la experimentación (figura 8). Aunque ya conocen la ecuación de la recta, argumentan en el modelo numérico. Podemos observar además en este equipo que la respuesta es validada democráticamente.

La regla de tres.

Profesora: —Y si ahora la absorbancia de una muestra es 0.8173, ¿qué concentración de glucosa tiene?

Iván: —Hay que hacerlo como hace rato. Lo que tenemos que hacer es esto, ¿por qué vamos a cambiar de método?

Guadalupe: —Yo digo que este número está entre estos dos (dato 5 y 6), pero no por eso tiene que ser el promedio.

Nancy: —Yo lo hice con regla de tres: si para 50 es 0.804, entonces para 0.8173… O sea que tomamos estos valores de referencia.

Al cuestionar a los estudiantes con un valor de absorbancia más exacto, hacen uso de la regla de tres; podemos observar en la interacción que los estudiantes hacen uso de sus conocimientos previos, adquiriendo significados.

La interpolación lineal.

Profesora: —¿Para qué graficaron?

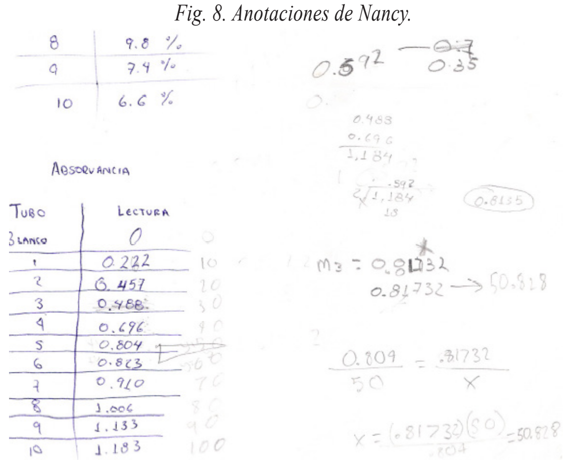
Ángel: —Para orientarnos.

Armando: —¡Espérate! Aquí también están los datos. Podemos señalar en la gráfica la absorbancia, y así como obtuvimos la gráfica, ver la concentración que le corresponde.

Martín: —Da casi lo mismo, aproximado.

Los estudiantes no consideran la gráfica como argumento; hasta que se les cuestiona al respecto, logran encontrar la respuesta interpolando la misma.

Fig. 8. Anotaciones de Nancy.



Finalmente observamos que a los estudiantes se les facilita el aprendizaje de las matemáticas experimentando, actividad que los identifica en su espacio, el laboratorio de química. Esto fue posible constatarlo, además del análisis de los episodios, por los comentarios al finalizar la actividad.

Dipolo modélico del estudiante de primer semestre en el diseño de aprendizaje

En la figura 9 se muestran los dipolos modélicos que configuran los estudiantes. Al iniciar con el modelo numérico a través de una tabla de datos configurando el dipolo modélico E1N: modelo numérico-determinación de concentración con espectrofotómetro (modelo-modelado), comprendiendo que los datos son de carácter lineal, les es posible usarlo como herramienta para obtener y comprender el fenómeno. Para el ajuste de la curva patrón usan empíricamente una aproximación gráfica al configurar el dipolo E1G: modelo geométrico-determinación de concentración con espectrofotómetro (modelo-modelado), luego de comprender que los datos son de carácter proporcional. En esa misma lógica, y relacionando los modelos numérico y gráfico con la inducción del profesor, constituyen el modelo algebraico contextualizado configurando el dipolo E1A: modelo algebraico-determinación de concentración con espectrofotómetro (modelo-modelado).

En la tabla 3 se muestran las características de las configuraciones dipolares de los estudiantes que participaron en la puesta en escena del diseño de aprendizaje.

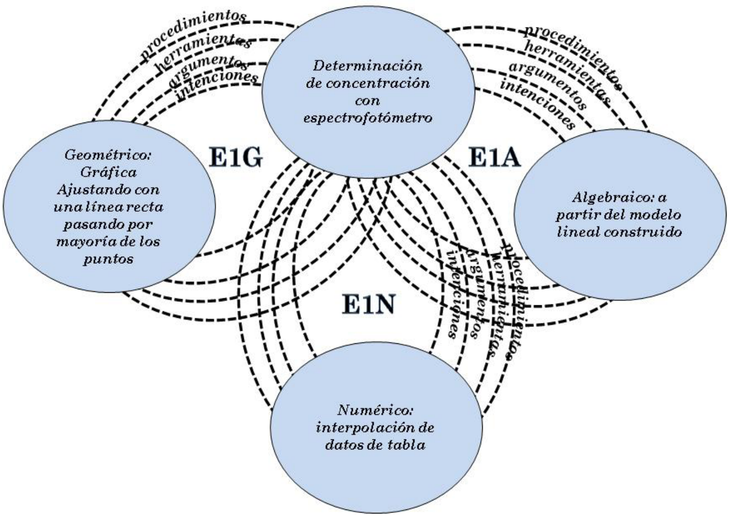
Como se puede apreciar en la tabla 3, y a diferencia de los estudiantes de sexto semestre, los participantes en la puesta en escena del diseño de aprendizaje interpolan de la tabla de datos el valor solicitado, hacen uso de la regla de tres a fin de generalizar el procedimiento y gráficamente realizan un ajuste lineal de datos utilizando regla y papel milimétrico, que les permite finalmente comprender la fórmula general.

Conclusiones

La mayoría de los estudiantes, cuando abandonan la escuela, lo hacen sin el conocimiento no solo de para qué le servían las matemáticas, sino también con el desconocimiento de la relación que existe con temas de asignaturas del área químico-biológicas, como la espectrofotometría, con asignaturas de semestres avanzados, incluso con el módulo de especialidad. Por ello fue nuestro interés priorizar la vinculación entre asignaturas y estas a su vez con la comunidad de investigadores, donde lo que identifica al ingeniero bioquímico es la experimentación como actividad y el laboratorio como escenario.

Hoy en día, el uso de espectrofotómetro UV-visible en la determinación cuantitativa de un analito es básico; esto conlleva, a quien hace uso de esta práctica, la toma de datos, la numerización, la construcción de una gráfica; y como parte de esa construcción, generalmente tendrá la necesidad de ajustar linealmente los datos obtenidos experimentalmente.

Fig. 9. Dipolo modélico de estudiantes participantes en el diseño de aprendizaje.



En la comunidad escolar hemos observado que algunos estudiantes hacen un mal uso de la regresión lineal cuando utilizan el programa Excel, en ocasiones porque no les es posible realizar nuevamente el experimento; en muchas otras por desconocimiento, ya que su prioridad es obtener la ecuación en la cual habrá que despejar la incógnita buscada, o sea la concentración de la sustancia buscada, reportando coeficientes de correlación muy por debajo de 0.98.

En apariencia, el ejercicio de la práctica de determinación de la concentración de una sustancia en una muestra dada por espectrofotometría se realiza en la comuni-

Tabla 3. Características de los dipolos de estudiantes con el diseño de aprendizaje aplicado

Dipolo modélico	Procedimiento	Herramientas	Argumentos	Intención
E1N	Interpolación numérica. Saca mitades en ambas variables.	Tabla numérica	Encontrar dato de en medio no dado	Obtener el valor medio
E1G	Interpolación gráfica. Ajusta colocando una recta que pasa por la mayoría de los puntos en la gráfica. Ubica el dato en y, toca la recta y baja a x.	Geométrico	La gráfica es recta: proporcional; mismo resultado.	Usar la gráfica como modelo. Obtener la concentración para cada valor de absorbancia.
	Regla de tres.	Algebraico	Relaciona dos datos dados con el solicitado.	Obtener la concentración de cualquier valor.
E1A	Modelo lineal construido.	Algebraico		Encontrar una fórmula general y comprender el fenómeno lineal.

dad escolar y en la de investigación de ingenieros bioquímicos de la misma manera, utilizando la misma técnica, el mismo procedimiento; sin embargo, las intencionalidades y las argumentaciones difieren entre sí. Es decir, estudiantes de sexto y primer semestre, así como el investigador, siguen las indicaciones de la técnica analítica de laboratorio, se construye la gráfica y se obtiene la fórmula; pero mientras la intención del estudiante de sexto semestre es la de obtener el resultado sin importar el valor obtenido del coeficiente de correlación, para el investigador es primordial obtener este dato de 0.98 a 1.0 con fines de precisión en los resultados. Por otra parte, para los estudiantes de primer semestre, al participar en el diseño de aprendizaje, sus intenciones son la de comprender el fenómeno físico de carácter lineal y descubrir la importancia del coeficiente de correlación al realizar el ajuste con regla y papel milimétrico en una aproximación al método por mínimos cuadrados.

Consideramos que proponer a los estudiantes de los primeros semestres de ingeniería bioquímica una actividad práctica en donde realicen una experimentación en la que identifiquen las variables que intervienen en el fenómeno, el comportamiento tendencial de estas y la posibilidad de predecir al manipular un fenómeno con ruido en los datos, permitirá la formación de las competencias específicas del uso y comprensión de la técnica espectrofotométrica, así como de lo lineal y una mirada hacia las bases de la regresión lineal.

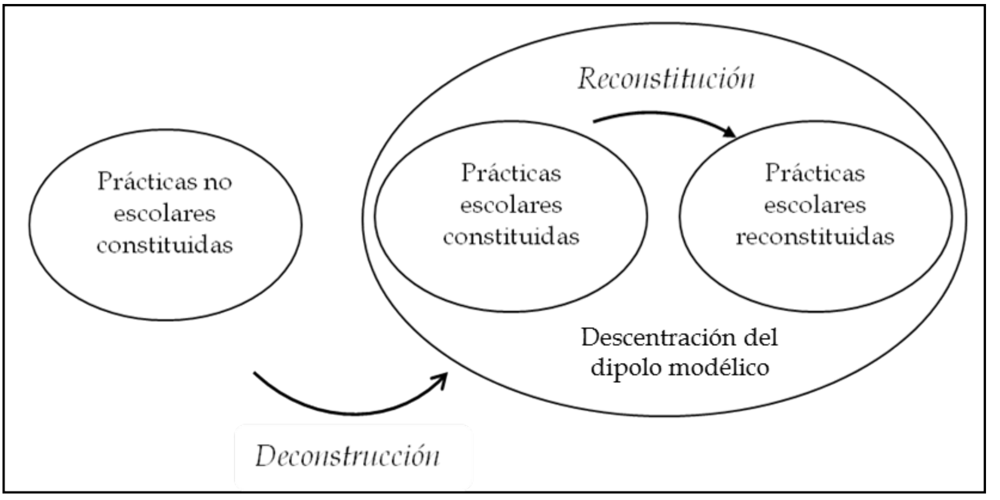
Al poner en escena un diseño de aprendizaje basado en la deconstrucción de prácticas, se mostró la descentración del dipolo modélico del estudiante, modificando sus argumentos, las herramientas de las que hace uso, el procedimiento al construir la curva de calibración y las intenciones. En ese sentido, esta descentración da lugar a la reconstitución de su práctica. Es decir, el estudiante reconstituye la práctica que ya tenía constituida. Práctica constituida con base a un dipolo que se descentra e incorpora un nuevo dipolo, robusteciendo su práctica espectrofotométrica. Descentrando un dipolo constituido basado en procesos algorítmicos al incorporar un nuevo dipolo basado en el análisis de los datos experimentales obtenidos.

La deconstrucción coadyuva a tender puentes entre las prácticas no escolares y las escolares, por ejemplo de investigadores. Deconstruir prácticas aporta elementos para ejercer prácticas funcionales en la escuela.

Con la reconstitución de la práctica concebimos un primer acercamiento de las prácticas que viven en el escenario no escolar hacia las prácticas que viven en escenarios escolares. Se aproxima la distancia entre la práctica del estudiante y la del investigador. Consideramos a la deconstrucción como actividad precursora de la reconstitución de prácticas en la escuela (figura 10).

En definitiva, los estudiantes de primer semestre que participaron en la actividad consideraron que aprender matemáticas construyendo la curva de calibración, analizando los datos y las relaciones entre la linealidad y la confiabilidad de los resultados analíticos, es una actividad que habría que ejercerse en la clase de Matemáticas, propuesta en prospectiva.

Fig. 10. Deconstrucción como acción precursora de reconstitución de prácticas en aula.



Literatura citada

Alonso, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 65-97.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2014). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 19-148.

Briceño, O. y Buendía, G. (2016). Una secuencia para la introducción de la función cuadrática a través de la resignificación de aspectos variacionales. *Scielo*. Recuperado de http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n39/n39a07.pdf

Camacho, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *3*(2). Recuperado de https://ries.universia.net/article/view/49/socioepistemologia-practicas-sociales-ensenanza-dinamica-calculo-diferencial

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(23), 137-168.

Derrida, J. (2008). *De la gramatología* (9a. ed., trad. O. del Barco y C. Ceretti). México: Siglo XXI Editores.

Galicia, A. (2014). *Desplazamiento de la práctica de diluciones entre la comunidad de ingenieros bioquímicos y la escuela*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

García, J.A. y Montero, L.A. (2010). Contenido de fenilalanina, tirosina y triptófano en Phaseolus vulgaris infestado con Zabrotes subfasciatus. En *Memorias del XVII Congreso Nacional de Ingeniería Bioquímica. VII Congreso Internacional de Ingeniería Bioquímica. VIII Jornadas Científicas del Posgrado en Biomedicina y Biotecnología Molecular*. Colegio Mexicano de Ingenieros Bioquímicos AC.

Krieger, P. (2004). La deconstrucción de Jacques Derrida (1930-2004). *Anales del Instituto de Investigaciones Estéticas*, (84), 179-188.

Lave, J. y Wenger, E. (1993). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Nueva York: Cambridge University Press.

Noss, R., Hoyles, C. y Pozzi, S. (2002) Abstraction in expertise: A study of nurses conceptions of concentration. *Journal for Researches in Mathematics Education*, *3*(33), 204-229.

Sánchez, D. (2010). *Validación de métodos para la determinación en aguas superficiales de metales alcalinos (sodio y potasio) por absorción atómica a la llama y alcalinotérreos (calcio y magnesio) por volumetría con EDTA*. Recuperado de http://gemini.udistrital.edu.co/comunidad/estudiantes/dlilian/contenido.htm

TecNM: Instituto Tecnológico de Acapulco. (2017). *Plan de estudios de Ingeniería Bioquímica. Retícula: IBQA -2010-207 (competencias profesionales)*. Recuperado de http://it-acapulco.edu.mx/ingenieria-bioquimica/

Torres, D. y Montiel, G. (2017). Modelación y uso de conocimiento trigonométrico en ingeniería. Un primer acercamiento a su estudio. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *30*(1). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Modelización de una actividad de la física para mejorar la enseñanza del concepto de función

Modeling an activity of physics to improve the teaching of the concept of function

CAMACHO RÍOS Alberto
VALENZUELA GONZÁLEZ Verónica
CALDERA FRANCO Marisela Ivette

Recepción: julio 1 de 2017 | Aprobado para publicación: septiembre 20 de 2017

Resumen

En este documento, el concepto de función es examinado desde un contexto no-matemático, la física. En el escrito se desarrolla una modelización del fenómeno de capacitancia, en el cual el comportamiento del uso de condensadores permite identificar las variables que afectan los procesos de carga y descarga del mismo. En esa práctica resultan magnitudes de tiempo t contra voltaje V y corriente I, cuyas gráficas representan funciones exponenciales o logarítmicas. El objetivo de estudio es que los estudiantes del segundo semestre de ingeniería sean capaces de identificarlas. Por las características de la modelización, la experimentación es sujeta del modelo praxeológico extendido de Castela y Romo-Vázquez (2011). Según los resultados, los estudiantes reafirmaron el conocimiento que tenían del concepto de función expo-

Alberto Camacho Ríos. Profesor-investigador del Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México. Líder del Cuerpo Académico Educación Matemática ITCHID-CA-2, LIIADT: Didáctica de la Matemática. Es doctor en matemática educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Correo electrónico: camachoriosalberto@gmail.com.

Verónica Valenzuela González. Docente del Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Chihuahua II. Miembro del Cuerpo Académico Educación Matemática ITCHID-CA-2, LIIADT: Didáctica de la Matemática. Maestra en educación por la Universidad Pedagógica Nacional. Correo electrónico: uvvalenzuelamx@yahoo.com.mx.

Marisela Ivette Caldera Franco. Docente del Programa de Maestría en Sistemas Computacionales del Instituto Tecnológico de Chihuahua II. Miembro del Cuerpo Académico Educación Matemática ITCHID-CA-2, LIIADT: Didáctica de la Matemática. Estudiante en el Programa de Doctorado en Educación de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Autónoma de Chihuahua. Correo electrónico: marisela_caldera_franco@yahoo.com.mx.

nencial a través de las actividades desarrolladas con la práctica. Además, involucrar conocimientos del curso de cálculo en la física causa fuertes conflictos con los programas de estudio que no son justificados por los profesores ni por los autores de los libros de texto.

Palabras clave: MODELIZACIÓN, FUNCIÓN, CONDENSADOR, GRÁFICA.

Abstract

In this paper, the concept of function is examined from a non-mathematical, physical context. The paper develops a modeling of the phenomenon of capacitance, in which the behavior of the use of capacitors allows to identify the variables that affect the loading and unloading processes of the same. From this practice the result is magnitudes of time t against voltage V and current I, whose graphs represent exponential or logarithmic functions. The objective of the study is that the students of the second semester of engineering would be able to identify them. Due to the characteristics of modeling, experimentation is subject to the Extended Praxeological Model of Castela and Romo-Vázquez (2011). According to the results the students reaffirmed their knowledge of the concept of exponential function through activities developed with practice. In addition, involving knowledge of the calculus course in physics causes strong conflicts with the study programs, which are not justified by teachers or authors of textbooks.

Key words: MODELING, FUNCTION, CAPACITOR, GRAPH.

1. Introducción

Por medio de una práctica de la física se pretende que alumnos del nivel de ingeniería, de entre 18 a 20 años de edad, identifiquen las funciones exponenciales y logarítmicas que resultan de la graficación de la función que modela el fenómeno de capacitancia. Como resultado de esa actividad, se busca que reafirmen el significado del concepto de función visto en los cursos de cálculo diferencial a partir de sus componentes fundamentales: dominio, contradominio, variables dependiente e independiente, concavidades, crecimiento y decrecimiento, entre otros.

Se parte del supuesto de que la práctica contiene una buena carga de elementos empíricos que surgen del fenómeno físico. En consecuencia, los datos que de la práctica resultan refieren magnitudes de tiempo t contra voltaje V y corriente I. Esas magnitudes se deben interpretar en el contexto de las funciones como valores de y según x, de modo que ello dé lugar a la graficación de la función que modela el fenómeno y a la identificación de las propias funciones.

El problema de investigación parte de una expresión de la física-matemática; es decir: $I(t)=\frac{\varepsilon}{R}e^{-}$, que se determina mediante un proceso de análisis de mallas que involucran magnitudes de capacitancia C, resistencia R, voltaje ε. El análisis lleva a su vez a la determinación de las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm (Serway, 1997, p. 154). Para determinar una expresión analítica que involucre la dependencia del tiempo de carga y corriente se debe resolver la ecuación del circuito de la malla a partir de las reglas de Kirchhoff; es decir:

$$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon-\frac{q}{C}-IR\right)=0,$$

donde q es la carga en el capacitor; ello lleva a establecer dos ecuaciones, como las siguientes:

$$R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0$$

$$\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}dt$$

Como R y C son constantes, esto puede ser integrado utilizando condiciones iniciales, como para $t = 0$, $I = I_0$, cuya sustitución lleva a la expresión buscada: $I(t)=\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$.

El procedimiento anterior es poco comprensible para un estudiante de segundo semestre de ingeniería y anula la parte experimental de la que surge. De ahí que sea necesaria una actividad de experimentación física que la valide, adecuada para los estudiantes de ese semestre.

Debido a los tipos de técnicas algorítmicas que surgen en la actividad, nos inclinamos por utilizar el marco teórico reconocido como modelo praxeológico extendido, de Castela y Romo-Vázquez (2011). El modelo extendido parte de incorporar a la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) una componente conocida como tecnología práctica, simbolizada como θ^{p} (figura 1), que permite sumar a la modelización *técnicas prácticas*, ausentes en las tecnologías teóricas θ^{th} (teoremas, definiciones, etcétera) de las que se desprenden las técnicas matemáticas que ayudan en la resolución de tareas adheridas al discurso matemático de la clase (Castela, El Idrissi y Malonga, 2015, p. 424).

Las técnicas prácticas suelen ser proposiciones empíricas que se corresponden con la fenomenología física (Camacho y Sánchez, 2015), o bien con disciplinas ajenas a la matemática que no se justifican con los elementos tecnológicos supuestos en el modelo de organización matemática (OM), reconocido en la TAD como praxeologías canónicas (Chevallard, 2007) que no incorporan en su definición estructural al empirismo.

Fig. 1. Modelo praxeológico extendido propuesto por Castela y Romo-Vázquez (2011), en el que se incluye a la unidad básica de análisis [T, τ, θ, Θ] una tecnología práctica θ^p.

$$\left[\begin{array}{cccc} T, & \tau, & \begin{array}{c}\theta^{th}\\ \theta^{p}\end{array} & \Theta \end{array}\right] \begin{array}{l} \neg\ P(M) \\ \neg\ I_u \end{array}$$

En la figura 1, I_u representa la institución usuaria de la matemática, en este caso la física, productora de tecnologías prácticas θ^p. $P(M)$ es la disciplina matemática constituida por la comunidad de investigadores que producen praxeologías matemáticas. Mientras que los tipos de tareas T y las técnicas τ se corresponden con las involucradas en la unidad básica de análisis de $[T, \tau, \theta, \Theta]$, así reconocida en Chevallard (1999). En esta última, el símbolo θ^{th} representa una tecnología teórica; es decir, un teorema, una definición, etcétera.

En la TAD, las praxeologías se consideran organizaciones matemáticas que contienen objetos y técnicas que se dedican en la práctica matemática hacia la resolución de problemas. Desde este punto de vista, las actividades de enseñanza-aprendizaje son constituidas por praxeologías matemáticas cuyos objetos no consideran otros conceptos que dieron origen a la construcción social de los conocimientos sobre los que descansa actualmente la enseñanza de la matemática. Por sí mismo, este marco teórico no acepta la modelación de conceptos de la matemática, cuya definición se considera empírica (Camacho y Romo-Vázquez, 2015, pp. 444-445; Castela, 2008); por ejemplo: los estudiantes en el nivel superior utilizan cotidianamente el software conocido como Wolfram, en sus diferentes versiones que se bajan al móvil, para resolver ecuaciones diferenciales que se les proponen como ejercicios en el salón de clase. La aplicación les otorga una síntesis de la solución de la ecuación sin mediar en el procedimiento completo, lo que da por resultado un desconcierto de los estudiantes al no contar con la totalidad del ejercicio. Como herramienta, el Wolfram se puede considerar como una *técnica práctica* que no pertenece al discurso diario de la clase, que utilizado adecuadamente puede favorecer el entendimiento de la resolución de diferentes problemas que se ventilan en los cursos. Otros casos frecuentes en el aula son las definiciones de las ecuaciones diferenciales parciales que devienen a las propias actividades de la física matemática, así como otros conceptos que se justifican a través de esta última ciencia, o bien a partir de argumentos que forman parte de la ingeniería.

2. Método

La actividad práctica es descrita ampliamente en Armendáriz (2017). Fue desarrollada a partir de la experiencia de la autora en la impartición del curso de física para estudiantes de ingeniería del sistema Tecnológico Nacional de México y eventualmente ha sido validada a los largo de varios semestres de su experimentación. La descripción que se muestra enseguida es fruto de esa experiencia.

2.1. Práctica

Objetivo: familiarizarse con el comportamiento del condensador identificando las variables que afectan los procesos de carga y descarga del mismo y la manera en que los afectan.

En sí mismo, el objetivo así descrito establece una tecnología práctica θ^p adherida al discurso tradicional de la física en el aula.

Cada equipo trabajará con lo siguiente:

- Dos condensadores electrolíticos de 2200 µF (a 16 V o más) y otro más de una capacitancia diferente.
- Un resistor de 6800 Ω (o mayor, hasta 10 kΩ).
- Un resistor de 1000 Ω u otro valor marcadamente diferente al anterior.
- Un condensador electrolítico de un valor diferente a 2200.
- Un foco de extensión navideña con socket (porta foco).
- Una fuente de voltaje variable o cuatro pilas de 1.5 V tamaño D y un porta pilas.
- Conectores, cronómetro y multímetro (eventualmente se puede utilizar el móvil).

Enseguida, la autora enumera las actividades a desarrollar para lograr el objetivo. Estas últimas, en el contexto del modelo extendido de Castela y Romo-Vázquez (2011), se deben considerar como *técnicas prácticas*, que hemos simbolizado como τ^P.

2.2 Actividad

τ_1^P: Armen un circuito en serie con la resistencia de 6800 Ω, el condensador de 2200 µF y la fuente de 6 V. Antes de cerrar el circuito asegúrense de que el condensador esté descargado juntando sus terminales y que han conectado la pata del condensador etiquetada como negativa con la terminal de más bajo potencial de la fuente (o la etiquetada como positiva con la terminal de más alto potencial). Dispongan el multímetro para medir uno de los parámetros del circuito y justo en el momento de cerrar el circuito comiencen a tomar lecturas cada dos segundos de un parámetro eléctrico del circuito; continúen así hasta que en varias lecturas consecutivas no haya cambio. ¿Qué pueden decir sobre el condensador después de esto?, ¿qué saben de él?

τ_2^P: para conocer más sobre la forma en que trabaja un condensador, registren en la misma forma en que lo hicieron en el punto anterior (cada dos segundos) todos los parámetros eléctricos durante el proceso de carga. Puesto que solo disponen de un medidor, tendrán que repetir el proceso de carga para hacer todos los registros. En cada caso dibujen un diagrama del circuito, etiquételo con los valores usados y representen en él también la forma en que están conectando el medidor.

τ_3^P: hagan lo mismo que en el punto 2 para el proceso de descarga. Para esto retiren la fuente de voltaje y cierren de nuevo el circuito; así el condensador se descargará y podrán registrar los valores de cada uno de los parámetros durante el proceso de descarga.

τ_4^P: para cada uno de los grupos de lecturas (cada variable dependiente observada):

1. Describan con detalle, por escrito, cómo se comporta la variable.
2. Hagan un bosquejo preliminar de la gráfica que representa su comportamiento a partir de la observación del comportamiento general de los valores registrados (sin elaborar la gráfica).
3. Hagan la gráfica precisa (usando una hoja electrónica de cálculo).

τ_5^P: con base en sus datos:

1. Durante el proceso de carga consideren el valor del voltaje en el condensador en un cierto instante y el valor del voltaje en el resistor en ese mismo instante. ¿Qué relación guardan estos dos valores con el voltaje de la fuente?
2. ¿Hay diferencia entre la forma en que se comporta la corriente durante el proceso de carga y el proceso de descarga?

La práctica involucra al menos dos actividades más después de la que se expone en la técnica τ_5^P, las cuales tienen que ver con el fenómeno de capacitancia. Para el problema que nos interesa, las actividades que se desarrollan con las técnicas τ_1^P a τ_5^P son suficientes para la verificación que pretendemos que hagan los alumnos, desde la práctica, de las funciones involucradas en el cálculo diferencial.

2.3. Desarrollo de la actividad

La actividad se desarrolló con un grupo de 30 alumnos de segundo semestre (enero-junio de 2017) de la carrera de Ingeniería en Informática, dentro del curso de Física para Informática del Instituto Tecnológico de Chihuahua II, que pertenece al sistema Tecnológico Nacional de México (TecNM). Los estudiantes, durante el semestre anterior, habían cursado y acreditado la asignatura de Cálculo Diferencial, que contempla los diferentes tipos de funciones y sus gráficas, asociadas a las que resultan en la actividad de modelización.

Los alumnos trabajaron en equipos de cuatro, organizándose de tal manera que tomaron las lecturas de las variables en los circuitos sugeridos.

A cada equipo se les entregó la actividad práctica, descrita anteriormente, permitiendo que ellos leyeran e interpretarán las instrucciones ahí contenidas. Las pocas dificultades que se presentaron en la interpretación de las instrucciones se refirieron al capacitor en su expresión de dispositivo físico. Esto último fue aclarado por el profesor, mostrando a los alumnos físicamente el dispositivo y haciendo analogía de este último con su expresión simbólica en la forma en que se utiliza en las descripciones de la física. En este mismo sentido, se aclaró la polaridad de las terminales del condensador, buscando que la terminal negativa se conectara con aquella de más bajo potencial de la fuente de voltaje. De ahí se siguió con la medición y toma de datos. El profesor tuvo cuidado de revisar que cada equipo conectara adecuadamente el multímetro para evitar desperfectos en este último, de modo que las lecturas que se tomaran se acercaran lo más posible a la realidad del fenómeno.

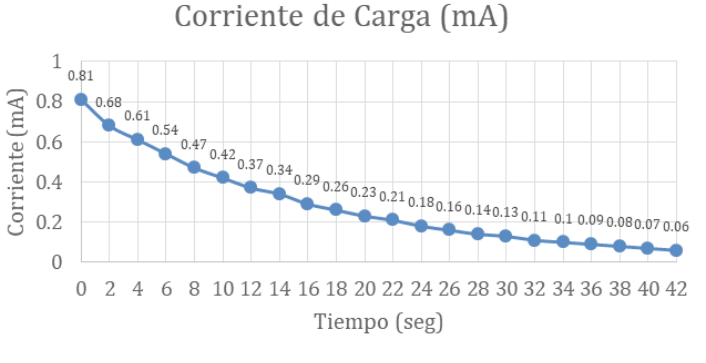
La toma de lecturas fue videograbada utilizando para ello el móvil de los estudiantes, lo cual permitió posteriormente la transcripción de los datos. El móvil se permitió en la experimentación debido a que la toma de lecturas se exigió por cada dos segundos, lo cual representaba cierta dificultad con el uso de cronómetros tradicionales. A partir de la videograbación fue posible rescatar las lecturas y transcribirlas en una tabla en Excel.

2.3. Descripción de las lecturas y gráficas

Por el tipo de experimento, se estimaron al menos cinco tablas con sus respectivas gráficas. La primera de ellas enlista elementos numéricos de voltaje V contra tiempo t en el proceso de carga en el condensador. La segunda refiere voltaje V contra tiempo t en el proceso de carga en el resistor. En la tercera, se estima corriente I contra tiempo t en el proceso de carga. En la cuarta se considera voltaje V contra tiempo t en el proceso de descarga en el condensador. Finalmente, en la quinta se contempla corriente I contra tiempo t en el circuito dentro del proceso de descarga.

En la imagen de la figura 2 se encuentran enumerados los valores de corriente I contra tiempo t determinados durante el proceso de carga del condensador; la gráfica de valores fue elaborada por uno de los equipos. Se puede observar que la cantidad de valores puntuales tienden a la gráfica de una función exponencial, cuya expresión es semejante a: $f(x) = a^{-x}$.

Fig. 2. Gráfica de la corriente *I* contra tiempo *t* en el proceso de carga del condensador.



Después de que los equipos terminaron de llenar las tablas de valores y elaborar las gráficas correspondientes, el profesor les hizo entrega de una lista de gráficas de diferentes tipos de funciones (ver anexo al final del artículo), como por ejemplo: $f(x)=c, f(x)=ax, f(x)=a^{x}, f(x)=x^{3}$, etcétera, en las que se colocaron funciones exponenciales y logarítmicas como las determinadas en la experimentación. Esto último permitió que los estudiantes identificaran las gráficas elaboradas, así como sus elementos significativos: variables dependiente e independiente, dominio, rango, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidades y asíntotas.

Debido a que las gráficas elaboradas a partir de los datos de la experimentación son semejantes a las proporcionadas en el listado por el profesor, no fue difícil que los estudiantes las identificaran. Sin embargo, se presentaron algunas situaciones que consideramos necesario comentar. Una de ellas tiene que ver con los tipos de gráficas que aparecen en el listado anexo, ya que la gráfica que resulta de la experimentación (figura 2) no se encuentra en este último, siendo la correspondiente, del tipo $f(x)=a^{-x}$. Ello provocó cierta confusión en los estudiantes, haciendo necesaria la participación del profesor, quien los orientó con una serie de preguntas hacia el tipo de gráfica deseada.

Otro problema se presentó al intentar definir el rango de esta última, que en los cursos de cálculo se reconoce como de (0,∞), el voltaje en general limita al voltaje que otorga la fuente; por lo tanto, la corriente quedaría en los límites de (0,0.8) miliamperios (mA). De igual manera, en los cinco casos el dominio que involucra al tiempo *t* solamente ocurría en el intervalo de (0,∞), que en la práctica de la experimentación no *se va al infinito*, siendo que en las gráficas cotidianas de los cursos de cálculo es de (-∞,8).

3. Discusión y resultados

Durante el desarrollo de la experimentación, la actividad física irrumpió con conocimientos cercanos a los conceptos del cálculo diferencial, como fueron dominio, contra-dominio y gráficas de las funciones en juego. Esos conocimientos se salieron del control de la modelización, lo cual provocó cierta confusión en los estudiantes, que deberá tomarse en consideración para futuras reproducciones de la práctica. Además, en otro momento, para modelar la actividad física desde el punto de vista de la didáctica de la matemática, será necesario un tratamiento acorde a los "momentos de estudio de la teoría antropológica de lo didáctico" (TAD) de Chevallard (2007).

Los momentos se concibieron bajo una estructura metodológica que lleva a los estudiantes a *construir* los conocimientos en el acto mismo de su enseñanza-aprendizaje. Además, una reproducción de la práctica en un escenario del curso de cálculo diferencial hace necesario que el profesor tenga conocimientos elementales de la física, lo cual no necesariamente puede ocurrir.

4. Conclusiones

En la práctica que precede se parte de un cuestionamiento que surge de actividades de la física, en este caso el circuito de carga de un condensador. Tal actividad supone un trabajo de modelización de la práctica misma, trabajo que involucra la recolección de datos que a su vez lleva a la graficación de funciones de la matemática. En la experimentación se introdujeron funciones exponenciales y logarítmicas, herramientas valiosas que dejan claro el concepto de capacitancia y confirman el comportamiento de las variables de las funciones mencionadas a través de su crecimiento y decrecimiento, considerando también los intervalos de los dominios y contradominios respectivos.

En este sentido, consideramos que los estudiantes reafirmaron el conocimiento que tenían del concepto de función exponencial, toda vez que esa ratificación se dio a través de las actividades desarrolladas con la práctica.

En sentido inverso, es decir desde la enseñanza del concepto de función (exponencial y logarítmica) en la asignatura de cálculo diferencial, esta situación pudiera luego constituir una base para mejorar y reafirmar el aprendizaje del mismo concepto, toda vez que la actividad es susceptible de conducir a la introducción de la gráfica de las funciones desde un contexto no-matemático, lo cual entra en conflicto con la presentación de estos temas en los cursos habituales de esa asignatura (Castela, El Idrissi y Malonga, 2015). No obstante, la introducción de conceptos en el curso de cálculo desde la física es cotidiana y la justificación a tales conflictos y restricciones que se provocan con su inmersión se encuentra en el marco teórico propuesto, toda vez que es poco conocido en los países latinoamericanos. En esos conflictos se encuentran dos modos de razonamiento opuestos, de los que destaca el nivel de rigor que debe emplearse en la enseñanza de las matemáticas para los futuros ingenieros y el empirismo dominante en el aula.

Referencias

Armendáriz, G. (2017). *Manual de prácticas de física general*. México: Departamento de Ciencias Básicas / Instituto Tecnológico de Chihuahua II / Tecnológico Nacional de México.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *28*(2), 135-179.

Castela, C. y Romo-Vázquez, A. (2011). Des mathématiques a l'Automatique: Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31*(1), 79-130.

Castela, C., El Idrissi, A. y Malonga Moungabio F. (2015). Les interactions entre les mathématiques et les autres disciplines dans les formations générale et professionnelle –*Compte-rendu du groupe de travail n°5*. En Theis L. (ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*– Actes du colloque EMF2015-GT5, pp. 424-430.

Camacho, Alberto & Romo-Vázquez Avenilde. (2015) Déconstruction-construction d'un concept mathématique. In Theis L (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques:*

enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. – Actes du colloque EMF2015–GT5, pp. 443-453.

Camacho, Alberto & Sánchez, Bertha Ivonne. (2015). Praxeologías y empiremas, recursos extremos para la construcción de conocimiento. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática-CIAEM, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/464/257

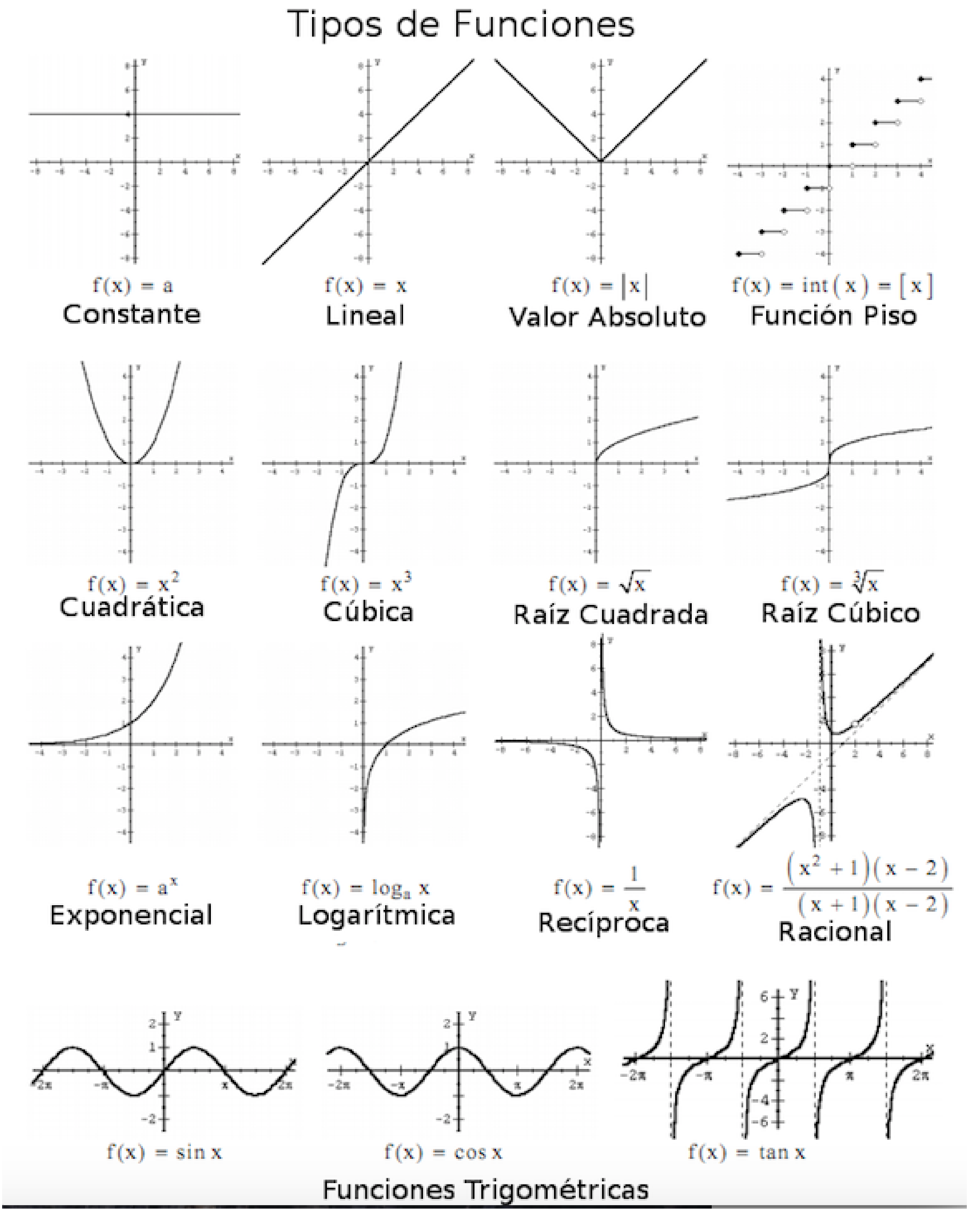
Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Consultado el 20 de abril de 2013, en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

Chevallard, Yves. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En Ruíz-Higueras, L. Estepa, A García, F. J (Eds.). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico, 705-746. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Serway, Raymond (1997). *Electricidad y magnetismo*. México: Mc-Graw-Hill Interamericana Editores.

Anexo

Listado de funciones sugeridas a los estudiantes durante el desarrollo de la experimentación.



Repensando la enseñanza de las matemáticas para futuros ingenieros: actualidades y desafíos

Rethinking mathematics teaching for future engineers: News and challenges

RODRÍGUEZ GALLEGOS Ruth

Recibido: agosto 21 de 2017 | Aceptado para publicación: septiembre 27 de 2017

Resumen

El presente escrito muestra la problemática de la formación de profesionales desde una visión muy particular de la matemática educativa. Esta problemática se agrava cuando se habla de una comunidad muy particular como la de ingeniería. Se sabe que actualmente se detecta la necesidad de contar con un mayor número de egresados en esta área y debido a una serie de dificultades tal necesidad no se ha podido cubrir del todo. En particular nos gustaría presentar los esfuerzos que se han tenido desde la matemática educativa, desde el enfoque de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación y simulación, pero sobre todo, en estos últimos años, de la manera en que un grupo de profesores-investigadores latinoamericanos, desde diversas miradas teóricas, han decidido aportarle elementos de respuesta y propuestas educativas. Pretendemos abordarlo desde estas tres miradas: la relación matemáticas e ingeniería, la propuesta de enseñanza a través de la modelación y retos y primeras acciones a través de la colaboración entre diversas realidades latinoamericanas.

Palabras clave: INGENIERÍA, FORMACIÓN DE INGENIEROS, MODELACIÓN MATEMÁTICA, SIMULACIÓN.

Ruth Rodríguez Gallegos. Profesora-investigadora del Tecnológico de Monterrey Campus Monterrey. Es licenciada en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Nuevo León, maestra en Educación por el Tecnológico de Monterrey y doctora en Matemáticas e Informática por la Universidad Joseph Fourier, en Grenoble, Francia. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI), del Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Comie), de la Comunidad Internacional de Profesores de la Modelación Matemática y Aplicaciones (ICTMA) y del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame). Correo electrónico: ruthrdz@itesm.mx.

Abstract
This paper presents the problem of the training of professionals from a very particular view of Educational Mathematics. This problem is aggravated when speaking of a very particular community as the engineering community. It is known that the need to have a greater number of graduates in this area is now detected and due to a series of difficulties this need has not been fully covered. In particular, we would like to present the efforts that have been made since Mathematics Education, from the teaching and learning approach of Mathematics through Modeling and Simulation but above all in these last years of the way in which a group of research professors Latin Americans have decided to contribute from different theoretical perspectives to give elements of answers and educational proposals to this problem. We intend to address in this paper about these three views: the relationship Mathematics and Engineering; the teaching proposal through Modeling and finally on challenges and first actions through the collaboration between different Latin American realities.

Key words: ENGINEERING, ENGINEERING TRAINING, MATHEMATICAL MODELING, SIMULATION.

Introducción

El presente escrito es una reflexión teórica a partir de trabajos previamente publicados alrededor de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para las comunidades profesionales, en particular para la comunidad de formación de ingenieros. Desde tiempo atrás este tema ha sido objeto de numerosas investigaciones en diferentes países y en México se ha destinado un interés creciente al respecto tanto en los foros de divulgación (congresos) como en el panorama internacional. Creemos valioso compartir con este escrito una síntesis de algunos trabajos en esta dirección y en concreto sobre la importancia del tema y los aportes de autores sobre cómo mejorar esa matemática que los futuros ingenieros necesitan, usan, etcétera.

Una primera situación que parece ser de importancia es la necesidad de contar con un mayor número de ingenieros graduados al año, cerca de 30,000 graduados más por año de acuerdo con algunas fuentes recientes (Moreno, 2017 y "Alerta déficit...", 2017). Lo anterior representa un problema para satisfacer las necesidades inmediatas de la industria. De ahí que es importante que las instituciones de educación que forman a este tipo de profesionistas se den a la tarea de repensar de manera importante la enseñanza de las ciencias básicas, principalmente la de las matemáticas. Por lo anterior, creemos que el camino de diseñar cursos con base en la modelación matemática es un camino viable para poner en juego las nuevas habilidades que requiere un ingeniero del siglo XXI. En este sentido mencionaremos algunas iniciativas internacionales que consideramos relevantes para este punto. El trabajo de Rattan y Klingbeil (2015), realizado en la Comunidad de Ingeniería Educativa al diseñar una propuesta (curso) para la enseñanza de las matemáticas en un primer año de Ingeniería, pretende que el éxito del curso en los estudiantes de ingeniería se debe a la aplicación de una enseñanza de conceptos matemáticos "just-in-time teaching" (enseñanza justo a tiempo). Sin embargo, el autor señala la importancia de que la propuesta sea llevada a cabo por ingenieros y no por profesores de la Facultad de Ciencias (matemáticos). Creemos importante mencionar este tipo de trabajos debido a que se tienen evidencias importantes del éxito de estas propuestas, al menos en el contexto de los Estados Unidos, en el sentido de incrementar el porcentaje de estudiantes que se inscriben en carreras de ingeniería al final de su primer año en la universidad. Consecuencia, de acuerdo con los autores, de la cercanía con el aspecto funcional de la matemática más que con su aspecto formal, una cuestión que sería primordial cuando uno se enfoca en la enseñanza de las matemáticas a futuros usuarios de esta ciencia.

Sobre la situación en Europa, podemos mencionar dos trabajos, uno de Reino Unido (Bourn y Neal, 2008; Jhori, 2009) y el de la Sociedad Europea de Formación de Ingenieros (SEFI por sus siglas en francés, https://www.sefi.be/publications/). Por un lado, Bourn y Neal (2008) desarrollan y presentan la necesidad de trabajar en la dimensión global del ingeniero, por lo que se pone de manifiesto la importancia de desarrollar las competencias disciplinares específicas, así como aquellas relacionadas con áreas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM por sus siglas en inglés), así como habilidades denominadas genéricas, como lo son el pensamiento holístico (Bourguet, 2005), pensamiento crítico, análisis y reflexión, aprendizaje activo y aplicación práctica, autoestima y empatía, así como fuertes habilidades de comunicación y escucha. Más adelante retomaremos la discusión de la enseñanza de las matemáticas en las áreas STEM (Pedretti y Nazir, 2011; Breiner *et al.*, 2012; English, 2015 y 2016), así como la relación del enfoque de modelación de fenómenos reales y de la simulación para promover las competencias genéricas como las antes mencionadas. Es importante resaltar que estas habilidades aparecerán en documentos varios como parte de las competencias que se esperan que el ciudadano del siglo XXI posea, específicamente el futuro ingeniero.

Es importante mencionar la parte de la iniciativa de la Sociedad Europea de Formación de Ingenieros, la cual propone un documento para los países que conforman la Comunidad Europea sobre el desarrollo de las habilidades de los graduados de ingeniería (siglo XXI). En este documento se plasman las competencias que se espera desarrollen los futuros ingenieros en cuanto el aprendizaje de las matemáticas. Es importante señalar el esfuerzo conjunto de los países que conforman la Unión Europea para el establecimiento de este tipo de listas, y sobre todo la parte de enfocarse en la realización y desarrollo de ciertas habilidades, en lugar de la transmisión de conocimientos puramente conceptuales.

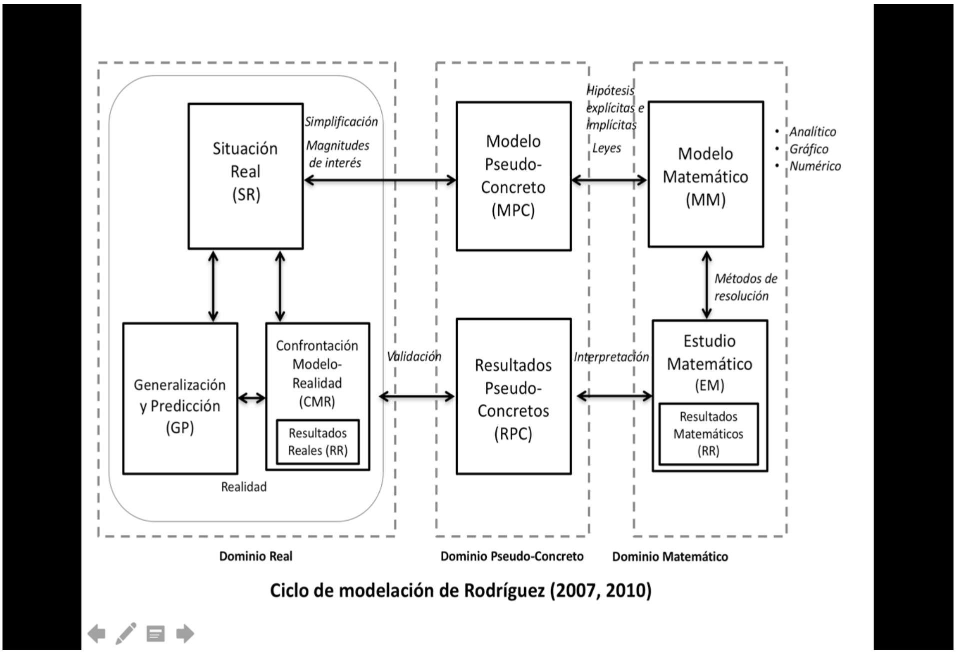
Estos tres documentos mencionados nos permiten tener un panorama general sobre lo que acontece en el ámbito internacional y sobre todo de cómo esta necesidad de formar un nuevo perfil en la universidad obliga a repensar la manera en que se enseña y aprende matemáticas en la escuela de hoy. Un mecanismo muy particular que permite hacer vivir una nueva realidad en los estudiantes es la enseñanza a través de la modelación. Presentaremos una mirada sobre el tema. En particular hablaremos sobre avances que se han hecho desde hace siete años en esta dirección en un instituto privado del noreste de México.

El Tecnológico de Monterrey en México es una institución privada que busca la formación integral en sus egresados, y muy en particular en los ingenieros. Lo anterior está fundamentado al interior de la institución en el marco de un modelo educativo integral que se ha denominado Modelo Tec 21 (Tecnológico de Monterrey, 2017), en el cual se busca alinear los esfuerzos internos con las necesidades externas tanto de los empresarios como de la sociedad. Respecto a lo que se entiende de manera global sobre la enseñanza basada en STEM, si bien en el origen este tipo de iniciativa, no estaba del todo explícita al seno de la institución. Consideramos que es posible repensar este tipo de propuestas educativas, en el sentido planteado por Shanahan *et al.* (2016), de que ha permitido un diálogo y una movilización importante al interior de la institución para permitir la creación y desarrollo de proyectos educativos entre los diferentes actores del proceso educativo.

Los antecedentes básicos que respaldan la definición sobre modelación matemática para el ámbito escolar nacen de los trabajos de Blum y Niss (1991) y Niss, Blum y Galbraith (2007), quienes postulan en un primer momento a la modelación simplemente como la relación entre matemáticas y la "realidad". Se propone visualizar la modelación matemática desde el ámbito escolar; se decide continuar el estudio adoptando la descripción de este proceso en término de etapas y transiciones entre etapas (Maab, 2006; Henning y Keune, 2007). Nuestra aproximación es del tipo educativa, de acuerdo con Kaiser y Siraman (2006) en el sentido de que nos interesa la formación de futuros ingenieros y desarrollar determinado contenido matemático. Un primer acercamiento al proceso de modelación estaría dado en Rodríguez (2010), como se observa en la figura 1.

Se pretende estudiar en el proceder de los alumnos cuando están frente a tareas de modelar fenómenos variando su proceder, sus dificultades observadas en términos de los argumentos que tienen al respecto la interpretación, el uso de diversos esquemas de representación y de la transición entre las etapas del proceso de modelación definida en un primer momento (Rodríguez, 2010). Es importante comentar que se entiende por modelo matemático las diferentes representaciones gráficas del objeto matemático en cuestión. Para nuestro caso, el estudio se realiza sobre la noción ecuación diferencial (ED, ver Rodríguez, 2010 y 2015): su gráfica de solución, la ED misma en tanto modelo analítico y una tabla numérica de datos que eventualmente puede ser modelada por una ED y/o su solución. En un esquema posterior de modelación (ver figura 2) se tuvo la necesidad de reducir la "realidad" a un breve apartado y

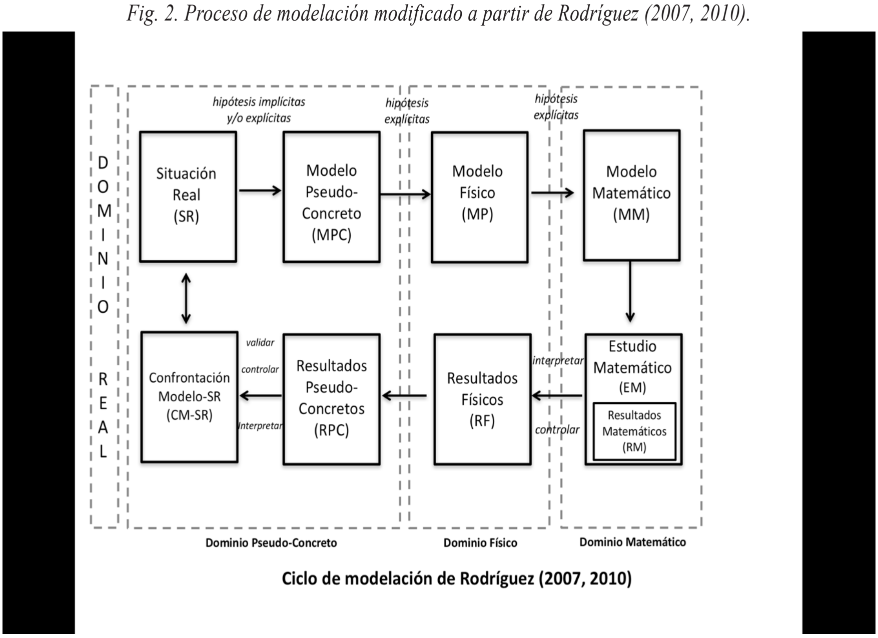
Fig. 1. Proceso de modelación a partir de Rodríguez (2007, 2010).



reconocer que en el contexto educativo usualmente se inicia a trabajar en un dominio pseudo-concreto (en el sentido de Henry, 2001, "una realidad" ya reducida) y cómo en este enfoque nos interesa modelar fenómenos extra matemáticos se decide trabajar en contextos extra matemáticos (usualmente la física, aunque igualmente pueden ser otros dominios, como química, biología, entre otros).

En un primer lugar, un curso como el que se presenta pretende mostrar a los alumnos de ingeniería un mayor enfoque balanceado entre las disciplinas STEM, así

Fig. 2. Proceso de modelación modificado a partir de Rodríguez (2007, 2010).



como una mayor equidad entre las *representaciones* de las disciplinas que se trabajan (matemáticas e ingeniería subrepresentadas). Se hace un énfasis especial en mostrar la importancia en que se trabajen diversos contextos, no solo de naturaleza física, sino también biológicas y/o sociales, introduciendo de manera especial aquellas situaciones donde las leyes empíricas son de importancia.

Reforma de cálculo en el Tecnológico de Monterrey

En nuestro instituto, Ecuaciones Diferenciales (ED) corresponde al último curso formal de matemáticas básicas. A través de su estudio se pretende que el alumno sea capaz de poder aplicar sus conocimientos a las materias de especialidad en curso posteriores (Tecnológico de Monterrey, 2012). Un antecedente importante a esta propuesta es el rediseño curricular en las matemáticas del sector de Ingeniería en el Campus Monterrey iniciado en el año 1999 (Salinas y Alanís, 2009; Pulido, 2010; Salinas, Alanís y Pulido, 2011), en donde se cuestiona no solo cómo enseñar, sino qué enseñar (contenido) y para qué enseñarlo (prácticas profesionales/ingenieriles).

Esta propuesta pretende retomar el camino ya avanzado, pero además propone que el curso de Ecuaciones Diferenciales se desarrolle a través de un enfoque de modelación matemática, enfatizando con ello que los objetos matemáticos sean vistos ante todo como herramientas para modelar fenómenos diversos en contextos varios (físicos, químicos, biológicos, sociales, etcétera).

Desde tiempo atrás, la problemática en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales radica, por un lado, en la falta de comprensión por parte de los alumnos de las ideas fundamentales alrededor de esta disciplina (Blanchard, 1994; Artigue, 1996; Rassmussen, 2001; Rassmussen y Whitehead, 2003; Arslan, 2010).

Por otro lado, muchas veces se reduce el curso a la enseñanza de una serie de prácticas procedimentales de métodos analíticos de resolución de estas ED, dejando a un lado otras formas de resolución de las mismas.

Investigaciones previas (Artigue, 1989, 1992, 1995, 1996) denotan que desde la década de los noventa, la reforma a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales promueve el cambio del uso preponderante de métodos analíticos hacia otros de naturaleza cualitativa y numérica (Arslan, 2010). Si bien es cierto existen casos de éxito documentados en México en los últimos años, aunque principalmente propuestas innovadoras sobre su enseñanza a nivel internacional (Kallaher, 1999; Lomen y Lovelock, 2000; Fisher, 2011; Brannan y Boyce, 2007; Blanchard, 2006; Boyce y DiPrima, 2010; Smith, 2011, Caron *et al.*, 2014; Natan y Klingbeil, 2015), así como algunas investigaciones al respecto, es necesario un cambio más fundamental de lo que se vive en las aulas en el día a día.

La enseñanza a través de la modelación y del uso de tecnología variada

En el caso del curso de ED, se ha considerado como tecnología disponible la siguiente:

a) calculadoras graficadoras CAS (ejemplo, TI CX Nspire CAS de Texas Instruments, Rodríguez, 2012).
b) Adicionalmente, situamos el uso de sensores (temperatura, voltaje, movimiento; ver Rodríguez 2015, Rodríguez y Quiroz, 2015) para que el alumno pueda realizar algunas prácticas experimentales dentro del aula con la finalidad de ver ejemplificado el modelo de la ED en el fenómeno real, tomar datos reales y ajustar, proponer modelo, verificar.
c) Cuando no es posible llevarlo a la clase, se trabaja con el uso de recursos educativos abiertos (REA), como simuladores PhET de la Universidad de Colorado (Rhen *et al.*, 2013).
d) Software de modelación como Tracker (de uso abierto; ver Olmos, 2012).
e) Laboratorios remotos.
f) Software de simulación dinámica como Vensim (Bourguet, 2005) o Stella (Fisher, 2011a y 2011b).
g) Software específico para una perspectiva de teoría de control como MatLabSimulink (Smith y Campbell, 2011) o SciLab (software de uso libre).

La tecnología anteriormente descrita permite el diseño y realización de actividades donde las competencias de modelación pueden ser eventualmente desarrolladas y que se propicie un aprendizaje significativo de las ED en tanto objeto matemático, así como herramienta para modelar fenómenos varios.

Ejemplo del estudio de circuitos eléctricos RC y RL a través de la simulación

Se han diseñado varias actividades para el curso; en particular se ha centrado la atención en el modelado de crecimiento de población, cambio de temperatura, mezclas, masa-resorte y circuitos eléctricos (Rodríguez, 2015). En particular presentamos en este escrito el modelar de la carga del capacitor en un circuito resistencia-capacitor RC. Se usa experimentación y simulación para recrear la situación y permitir que el alumno se familiarice con el fenómeno eléctrico y verifique la solución de la ED asociada al fenómeno. El objetivo es estudiar la forma en que cambia la carga $q(t)$ en un capacitor C respecto al tiempo utilizando el sensor de voltaje. Se pide a los alumnos que a través de las representaciones gráficas y numéricas que proporciona la calculadora TI-Nspire CX CAS establezcan la "forma en que cambia la carga en el capacitor C respecto al tiempo t"; es decir, que a través de una *situación real* puedan *comprender* la solución de la ED que subyace al fenómeno.

Posteriormente a esta práctica, en una segunda sesión se modela un circuito RL a través del simulador PhET (figura 2), tanto con corriente directa como con alterna.

Se pide al alumno discutir al respecto la función respuesta de ambos circuitos y relacionar ese comportamiento a la función de voltaje de entrada y la solución misma. Se observa en esta actividad una cuestión importante de análisis de solución de la ED en términos de estados transitorio y estable y se asocia esto a la forma de la función de entrada (excitatriz o perturbación) de la ED:

Construcción de simuladores: las prácticas profesionales en el curso de ED

Consideramos que retomar un enfoque sistémico (holístico) puede ser de mucha utilidad en la modelación y simulación de estos contextos sociales. Ejemplos como Fisher (2011a y 2011b) proponen desde tiempo atrás retomar este enfoque sistémico desde la preparatoria. Fisher (2011a y 2011b) propone el uso de un software como Stella; sin embargo, como veremos más adelante, es posible hacer uso de otro software equivalente de simulación dinámica como Vensim. Parte de este esfuerzo de conjuntar matemáticas y enfoque sistémico se puede ver plasmado en Rodríguez y Bourguet (2014 y 2015).

Otro esfuerzo es vincular cuestiones básicas de teoría de control, materia dirigida generalmente a ingenieros en mecatrónica, electrónica, eléctrica, sistemas digitales con conceptos matemáticos. Un esfuerzo importante en este sentido lo constituye el trabajo de Smith y Campbell (2011), así como el estudio de Castela y Romo (2011) y Romo-Vázquez (2014), donde justamente se estudia a una comunidad de ingenieros que hacen uso del tema “transformada de Laplace” y sus diversos significados en el área laboral. El software utilizado para esta cuestión es MatLab/Simulink.

Un breve análisis de la experiencia México (curso de ED) a través de English (2016):

1. La necesidad de hacer *transparente y explícita las conexiones* entre las disciplinas que conforman STEM para estudiantes y profesores mayor claridad de procesos en el proceso de resolver problemas en un enfoque STEM. Consideramos que la propuesta desarrollada en México pretende avanzar en esta dirección; sin embargo, habrá que seguir trabajando en este tipo de vinculaciones entre el

Fig. 3. Ejemplos de producciones de alumnos al momento de modelar la corriente en un circuito RL a través del simulador PhET; uso de corriente alterna (variable) en un circuito RL.

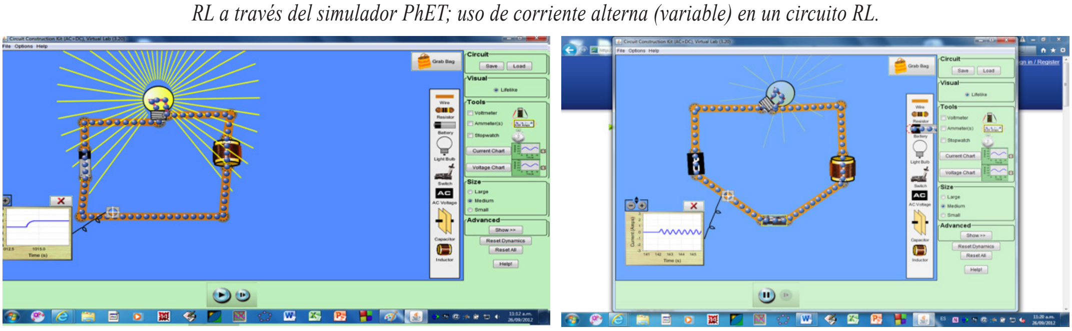


Fig. 3. Representaciones de la ED de primer orden necesaria para modelar el afecto entre dos personas (sistema de ED, comportamiento periódico) y la expansión de una enfermedad de una comunidad de personas (función logística).

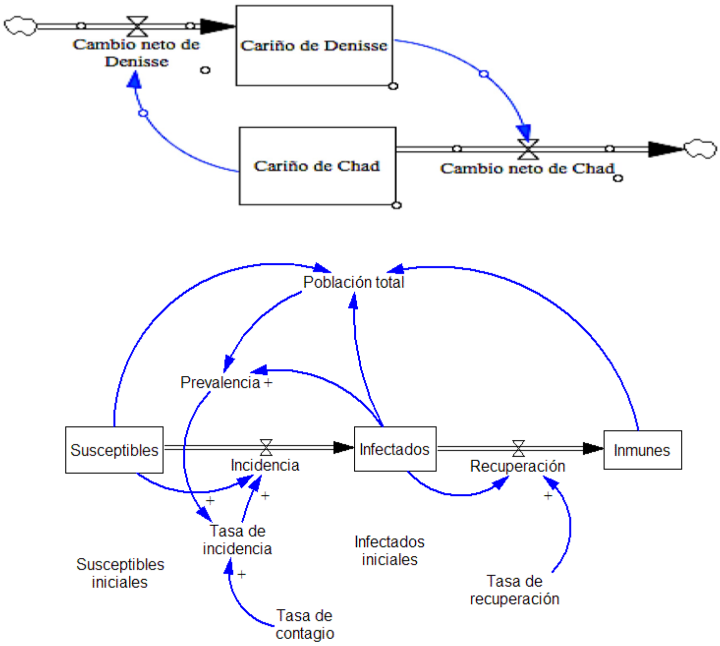
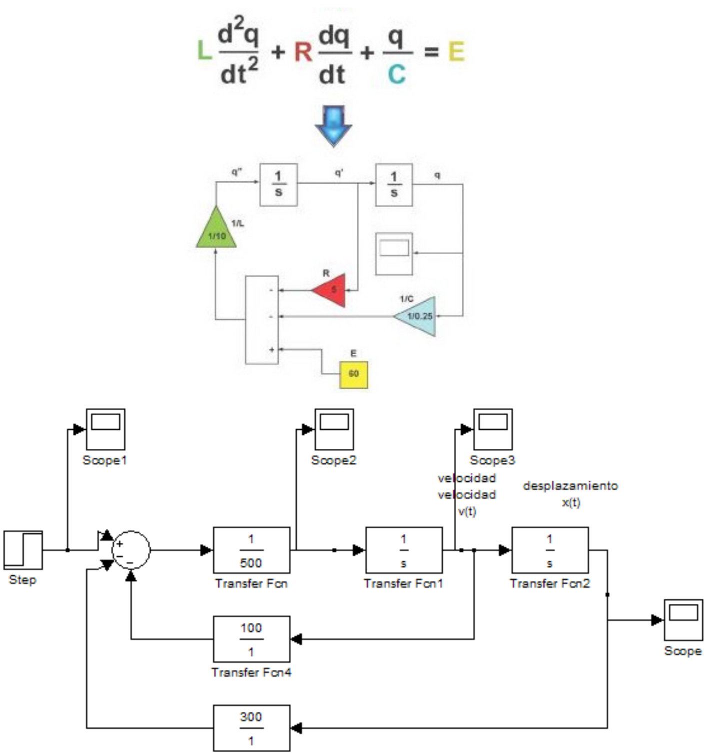


Fig. 4. Representación en MatLab/Simulink de una ED de primer orden RCq'+q(t)=E(t) para modelar un circuito RC (Smith y Campbell, 2011) y de una ED de segundo orden $mx''+\beta x'+x(t)=F(t)$ *para modelar un sistema mecánico masa-resorte.*



vocabulario usado en una y otra disciplina y, sobre todo, en su puesta en juego en el ámbito educativo.

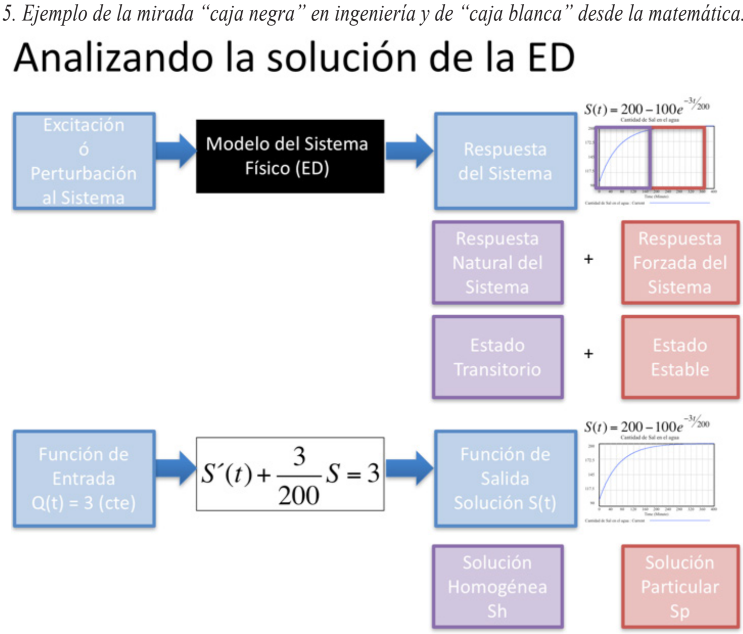
2. Una expectativa de la educación STEM efectiva es motivar a hacer nuevas conexiones entre dos o más disciplinas, y que debe ser evidencia con una mejora en el aprendizaje y en la transferencia en los estudiantes, así como su interés y su compromiso hacia la resolución de problemas. Estos resultados de aprendizaje requieren que los alumnos sean competentes en el contenido de las disciplinas específicas, pero también en las representaciones y en la fluidez (*representation fluency*) de estas, así como en la traducción entre las diferentes representaciones.

Una perspectiva posible: el área STEM

Desde los noventa, la National Science Foundation (NSF) en Estados Unidos mostraba una gran preocupación sobre la importancia en la integración de científicos de diferentes áreas, como la física, matemáticas e ingeniería, en objetivos comunes. La NSF consideraba que las universidades deberían realizar un esfuerzo en integrar departamentos que incluyeran científicos de varias áreas. Si bien tal proposición no llegó a implementarse por completo en las universidades, dejó la semilla para iniciar estudios y proponer un *syllabus* que tuviera como objetivo transformar los cursos, de tal forma que se promoviera la integración de las ciencias, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (STEM en sus siglas en inglés).

Existen numerosos trabajos alrededor de este tema, los cuáles proporcionan diversas interpretaciones del surgimiento del término STEM, principalmente en EEUU. De acuerdo con Shanahan *et al.* (2016), al parecer el término se acuña más en

Fig. 5. Ejemplo de la mirada "caja negra" en ingeniería y de "caja blanca" desde la matemática.



función de buscar una alianza de áreas para el desarrollo de investigación conjunta y sobre todo la búsqueda de fondos para estos fines. En la práctica, la iniciativa STEM parece ser más la conformación de una red de colaboración donde actores clave de iniciativas de educación de la ciencia y matemáticas parecen comprometerse hacia un objetivo en común. Hoy en día, el *paraguas* de STEM está dirigido más a buscar el currículum integrado y diversas publicaciones recientes muestran casos de éxito donde esta integración ha sido fructífera. Sin embargo, Shanahan *et al.* (2016, pp. 130-131) resaltan un debate actual al respecto:

> ¿Es STEM un ambiente multidisciplinario donde la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas son vistas trabajando juntas manteniendo sus compromisos epistemológicos distintos o es STEM un espacio interdisciplinario o incluso multidisciplinario que no es ciencia ni matemáticas, pero algo que emerge entre o más allá de compromisos disciplinarios?

Justo en este artículo vemos la importancia de resaltar la segunda parte de la pregunta ya lanzada por Shanahan *et al.* (2016) en esta dirección de STEM. Es justamente la integración en STEM lo que representará todo un reto, y a pesar de que este es un tema que sigue pendiente y vigente, la literatura reciente se enfocará en avanzar más en el área STEM en esta dirección. De acuerdo con los autores, existen diversas perspectivas para abordar el tema; algunos educadores entenderán el término STEM no solo desde la visión integradora, pero enfatizando más los problemas fuera de la escuela (los problemas reales). Desde este punto de vista, desde la introducción, hemos visto la importancia del desarrollo de investigación sobre modelación matemática en la comunidad de matemática educativa.

Estudiaremos a continuación un ejemplo de una investigación que propone estudiar el fenómeno STEM desde una visión integradora. Un trabajo importarte a mencionar en este sentido es el de Kelley y Knowles (2017) sobre su esfuerzo de proponer un marco teórico para la educación STEM integrada. En este marco teórico, ellos reconocen la importancia de concebir esta integración de cuatro disciplinas desde perspectiva sugerida en la figura 6.

Desde su perspectiva, la enseñanza bajo STEM es compleja, y los autores reconocen tal complejidad considerando la interacción de las diferentes variables en juego, proponiendo un sistema de poleas que permite atacar la enseñanza, fijando dos componentes como soporte para impulsar las otras. Así, la indagación científica (*science inquiry*, SI) y la cultura tecnológica (*technological literacy*, TL), permiten que la componente diseño ingenieril (*engineering design*) y pensamiento matemático (*mathematical thinking*) sean más efectivas. Es decir que bajo este modelo de poleas, el diseño ingenieril y el pensamiento matemático tienen un rol central que al interactuar con el soporte SQ + TL promueven el aprendizaje bajo el curriculum STEM. En particular al respecto de la descripción que ellos proponen para esta parte resalta el hecho de que diversos "estudios han mostrado que los estudiantes están

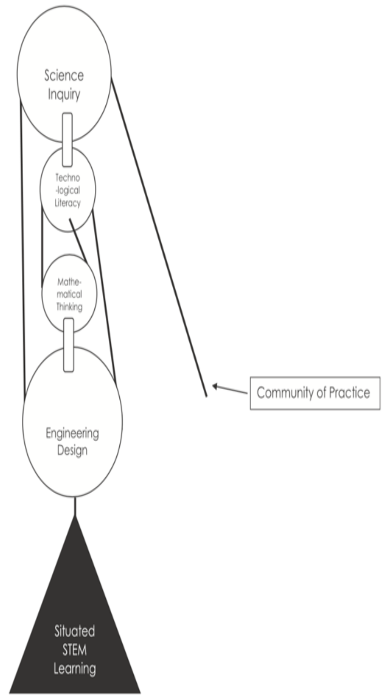


Fig. 1 Graphic of conceptual framework for STEM learning

Fig. 6. Gráfico del aprendizaje conceptual bajo la perspectiva STEM (Kelley y Knowles, p. 4).

más motivados y se desempeñan mejor en la evaluación del contenido matemático cuando los maestros usan un enfoque de educación de STEM integrado" (Kelley y Knowles, 2016, p. 6).

Este acercamiento conlleva diferencias con el movimiento de resolución de problemas, ya que en este enfoque no necesariamente la interacción con otras ramas científicas y la modelación matemática tiene lugar. El problema puede ser puramente matemático, como fue la tendencia en los inicios de los estándares de los Estados Unidos en la década de los noventa. Justamente Kelley y Knowles (2016) nos muestran los cambios en los estándares del presente siglo. Aunado a lo anterior, Williams (2007) señala que los alumnos "desean saber la relevancia de aprender matemáticas para su vida" (p. 572). Si bien es cierto que esta integración pretende dar una respuesta a esta problemática, en ocasiones ello no es posible, debido en parte a que los profesores les hace falta un mejor entendimiento de la educación STEM. Es entonces que trabajos como los descritos anteriormente aparecen importantes, ya que hay una vinculación entre las comunidades de educación de ingeniería y de enseñanza de las matemáticas.

Sin embargo, Kelley y Knowles (2016) resaltan en sus conclusiones que los estudiantes están a menudo desinteresados y/o desmotivados en aprender ciencias, ya que no observan relaciones entre los conceptos que aprenden en la clase de ciencia o matemática y aplicaciones del mundo real. Ellos sugieren, a manera de conclusión, sobre la importancia de preparar mejor a los educadores en esta perspectiva de una manera integrada, dando a conocer los resultados ya reportados por otras investigaciones, además de las diversas perspectivas pedagógicas y de teoría de aprendizaje.

Sobre la importancia de las investigaciones en el área de STEM, aún hay mucho por hacer. Creemos que este es un camino que debe continuarse para analizar que se debe seguir o no en esta dirección. Es muy importante resaltar que actualmente muchos organismos que otorgan financiamiento para realizar investigaciones en estas áreas (educación de la ingeniería, de la ciencia o de la matemática educativa) dan mucha importancia en estudios con enfoque STEM.

La importancia de la colaboración en redes

Concluimos este escrito resaltando la creación y desarrollo de un grupo de profesores-investigadores que se han organizado desde diciembre 2014 en México y desde julio 2015 en Latinoamérica, pretendiendo aportar en esta dirección, compartiendo sus propias experiencias e investigaciones en foros nacionales e internacionales. Pero sobre todo intentando responder a las siguientes preguntas igualmente planteadas por el grupo (Rodríguez *et al.*, 2015 y 2016):

- El tipo de matemáticas que debe ser enseñada y aprendida.
- La relación de las matemáticas con las ciencias de la ingeniería.
- El rol que juegan los profesionales en la transformación del conocimiento matemático hacia un saber práctico, y de qué manera ese saber práctico puede volverse al aula.
- Las formas de modelización pertinentes en esos niveles.

Se sugiere saber más del grupo en el sitio https://www.facebook.com/fpme2014/.

En este sentido, la producción de los miembros del grupo se puede ver reflejadas en dos artículos (Rodríguez *et al.*, 2015 y 2016) del grupo. Entre otras cuestiones, se enfatiza la necesidad de tomar en cuenta otras realidades, y para ellos enumeramos a continuación organismos o conferencias relevantes al respecto.

Incluimos también algunas referencias importantes de organismos y eventos asociados a esta temática:

a) Cuatro organismos de acreditación:
   1. Sistema de Acreditación de Programas de Arquitectura e Ingeniería (http://acaai.org.gt/).
   2. Sistema de Homologación Centro Americano de Programas de Ingeniería (http://www.csuca.org).
   3. ABET (http://www.abet.org/accreditation/).
   4. CACEI en México (http://www.cacei.org)

b) Cuatro congresos internacionales:
   1. Conferencia anual de la Sociedad Americana de la Educación de la Ingeniería, ASEE por sus siglas en inglés (American Society for Engineering Education; http://www.asee.org).

2. Conferencia anual organizada por el Consorcio Latinoamericano y del Caribe de Instituciones de Ingeniería; LACCEI por sus siglas en inglés (http://www.laccei.org).
3. Fronteras en Educación, organizado por la IEEE (http://fie-conference.org).
4. Conferencia Internacional de Profesores de la Modelación y Aplicaciones, ICTMA (http://www.ictma15.edu.au).

c) Tres organismos internacionales y nacionales:
1. Academia Nacional de Ingeniería en Estados Unidos (National Academy of Engineering, https://www.nae.edu/).
2. Sociedad para la Formación de Ingenieros en Europa (SEFI).
3. Asociación Nacional de Facultades y Escuelas de Ingeniería (ANFEI) en México (http://www.anfei.mx).

d) Grupos de trabajo relacionados en el marco de conferencias internacionales:
1. Grupo de estudio “Las interacciones entre las matemáticas y las otras disciplinas en la formación general y profesional” en el marco del Espacio Matemático Francófono (Espace Mathématique Francophone, EMF por sus siglas en francés); http://emf2015.usthb.dz.
2. Grupo de estudio “Modelación, interdisciplinariedad y complejidad” (GT4) o “Matemáticas en la pluralidad de enseñanzas en el nivel superior” (GT5) en el marco del Espacio Matemático Francófono (Espace Mathématique Francophone; https://emf2018.sciencesconf.org/.
3. Grupos de estudio “Matemáticas en y para el trabajo” (TSG3); “Modelación y aplicaciones” (G21) e “Interdisciplinariedad en matemática educativa) (TSG22) en la Conferencia Internacional de Matemática Educativa, ICME por sus siglas en inglés, 2016 en Hamburgo (http://icme13.org/topic_study_groups).

El listado anterior no pretende ser exhaustivo; sin embargo, es una primera mirada de eventos importantes en México, Latinoamérica y el mundo sobre cómo una comunidad como matemática educativa aborda la problemática de la formación de profesionales, específicamente ingenieros. Es muy importante a los profesores de matemáticas para ingeniería u otras profesiones ser parte de la discusión al respecto. Parte de este esfuerzo que hoy compartimos en este escrito es una invitación al diálogo en conjunto, pero sobre todo a proponer soluciones de tal forma que la formación matemática de estas profesiones sea cada vez más sólida y con significado.

Conclusiones

Sin duda alguna, y después de leer los avances en investigación e innovación educativa en este tema, nos queda claro que aún hay mucho por hacer en este tema. Consideramos importante que se puedan tener redes de colaboración como el grupo antes descrito; tener en claro la problemática actual sobre la formación de ingenieros en México y cómo esta se trabaja en otros contextos, pero sobre todo ver cómo trabajos alineados a modelación permiten ver la riqueza de este enfoque para desarrollar competencias genéricas tan valiosas como las ya postuladas por organismos internacionales. Además, consideramos valioso ampliar el enfoque a las áreas STEM y sus avances ya reportados para poder seguir contribuyendo a la debida formación de ingenieros.

La pregunta que queda de manifiesto aquí es cómo, desde nuestra experiencia previa como profesores investigadores en matemática educativa dedicados a formar futuros ingenieros, podemos contribuir al fenómeno STEM actualmente en auge y cómo nuestros hallazgos previos en investigación aportan de manera importante al diálogo actual en el tema para así poner en relevancia el papel de las matemáticas en STEM, y mejorar paulatinamente la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los futuros ingenieros en México.

Referencias

Alerta déficit de ingenieros en Nuevo León (2017, agosto). *Zócalo*. Recuperado de http://www.zocalo.com.mx/seccion/articulo/alerta-deficit-de-ingenieros-en-nuevo-leon

Arslan, S. (2010). Do students really understand what an ordinary differential equation is? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(7), 873-888. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2010.486448

Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles du premier cycle universitaire. *Cahier du séminaire de Didactique des Maths et de l'Informatique de Grenoble*, édition IMAG, 183-209. Grenoble, Francia.

Artigue, M. (1992). Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices. En E. Dubinsky y G. Harel (eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25*. Washington, DC, Estados Unidos: MAA.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1996). Teaching and learning Elementary Analysis. En *Memorias del VIII Congreso Internacional de Matemática Educativa (ICME VII), Selected Lectures* (15-29). Sevilla, España.

Blanchard, P. (1994). Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint. *The College Mathematics Journal*, *25*, 385-393.

Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G. (2006). *Differential equations* (3a. ed.). Belmont: Cengage.

Bourguet, R.E. (2005). Desarrollo de pensamiento sistémico usando ecuaciones diferenciales y dinámica de sistemas. En *Reunión de intercambio de experiencias en estudios sobre educación del Tecnológico de Monterrey* (RIE). Monterrey, Nuevo León, México. Recuperado de http://www.mty.itesm.mx/rectoria/dda/rieee/pdf-05/26(DIA).RafaelBourguet.pdf

Bourn, D. y Neal, I. (2008). *The global engineer. Incorporating global skills within UK Higher Education of Engineers*. Engineers against Poverty, Leading Education and Social Research, Institute of Education, University of London.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects-State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Boyce, W. y DiPrima, R. (2010). Ecuaciones diferenciales y problemas en valores de la frontera (5a. ed.). México: LimusaWiley.

Brannan, J. y Boyce, W. (2007). Ecuaciones diferenciales. Una introducción a los métodos modernos y sus aplicaciones. México: Grupo Editorial Patria.

Castela, C. y Romo, A. (2011). Des mathématiques a l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *31*(1), 79-139.

Caron, F., Lidstone, D. y Lovric, M. (2014). Complex dynamical systems. In S. Oesterle y D. Allan (eds.), *Actes du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques 30 mai-3 juin 2014* (pp. 137-148). Alberta.

Capote-León, G.E., Rizo-Rabelo, N. y Bravo-López, G. (2016). La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria. *Revista Universidad y Sociedad*, *8*(1), 21-28. Recuperado de http://rus.ucf.edu.cu/

deCoito, I. (2016). STEM Education in Canada: A knowledge synthesis, STEM. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *16*(2), 114-128. http://dx.doi.org/10.1080/14926156.2016.1166297

English, L.D. (2015). STEM: Challenges and opportunities for mathematics education. *Proceedings of PME*, *39*(1), 1-18.

English, L.D. (2016). STEM Education K-12: Perspectives on Education. *International Journal of STEM Education*, *3*(3), 1-8. http://dx.doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1

Fisher, D. (2011a). *Modeling Dynamics Systems: Lessons for a First Course* (3a. ed.).

Fisher, D.M. (2011b). Everybody thinking differently: K-12 is a leverage point. *System Dynamics Review*, *27*, 394-411. http://dx.doi.org/10.1002/sdr.473

International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications [ICTMA]. *The first twenty five years*. Recuperado de http://www.icmihistory.unito.it/ictma.php

Henning, H. y Keune, M. (2007). Levels of modelling competencies. En W. Blum, P.L. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 225-232). Nueva York, Estados Unidos: International Commission on Mathematical Instruction ICMI.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En M. Henry (ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 149-159). Besançon: Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.

Jhori, A. (2009). Preparing Engineers for a Global World: identifying and Teaching Strategies for Sensemaking and Creating New Practices. En *Proceedings of the 39th ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference*.

Kallaher, M. (1999). *Revolutions in Differential Equations, exploring ODES with modern technology*. En *MAA Notes 50*. Washington, D.C., Estados Unidos: MAA.

Kaiser, G. y Siraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*(3), 302–310. http://dx.doi.org/10.1007/BF02652813

Kelley, T. y Knowles, G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education*, *3*(11). http://dx.doi.org/10.1186/s40594-016-0046-z

Lomen, D. y Lovelock, D. (2000). *Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. México: CECSA.

Maab, K. (2006). What are modeling competencies? *ZDM*, *38*(2), 113-142.

Moreno, T. (2017). México tiene déficit de ingenieros. *El Universal*. Recuperado de http://www.eluniversal.com.mx/articulo/nacion/politica/2017/01/10/mexico-tiene-deficit-de-ingenieros

Nathan, K. y Klingbeil, N. (2014). *Introductory Math to Engineering Applications*. Wiley.

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En *ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education* (pp. 3-32). Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Pedretti, E. y Nazir, J. (2011). Currents in STSE education: Mapping a complex field, 40 years on. *Science Education*, *95*(4), 601-626.

Rasmussen, C. y King, K. (2001). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(2), 161-172. http://dx.doi.org/10.1080/002073900287219

Rasmussen, C. y Whitehead, K. (2003). *Learning and Teaching Ordinary Differential Equations*. The Mathematical Association of America (MAA). Recuperado de http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html

Rehn, D., Moore, E., Podolefsky, N. y Finkelstein, N. (2013). Tools for high-tech tool use: A framework and heuristics for using interactive simulations. *Journal of Teaching and Learning with Technology*, *2*(1), 31-55.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(4-I): 191-210. México. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Rodríguez, R. (2012). Modelación y uso de tecnología TI Nspire CX CAS en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Innovaciones Educativas de la Texas Instruments*, (duodécima edición), 24-26. México. Recuperado de http://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/Revista_innovaciones_2012_web.pdf

Rodríguez, R. y Bourguet, R. (2014). Diseño interdisciplinario de modelación dinámica usando ecuaciones diferenciales y simulación. *Proceedings of the LACCEI Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology (LACCEI'2014) "Excellence in Engineering To Enhance a Country's Productivity" 22-24 de julio de 2014*. Guayaquil, Ecuador. Recuperado de http://www.laccei.org/LACCEI2014-Guayaquil/RefereedPapers/RP142.pdf

Rodríguez, R. y Bourguet, R. (2015). Diseño de una actividad de modelación en un curso de ecuaciones diferenciales desde una perspectiva de dinámica de sistemas. *Proceedings of the Latin American and Caribbean Consortium of Engineering Education* (LACCEI 2015). República Dominicana. Recuperado de http://www.laccei.org/LACCEI2015-SantoDomingo/RefereedPapers/RP232.pdf

Rodríguez, R. (2015). A Differential Equations Course for Engineers through Modelling and Technology. En G. Stillman, W. Blum y M.S. Biembengut (eds.), *Mathematical Modelling in Education, Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 545-555). Nueva York, Estados Unidos: Springer. Recuperado de http://www.springer.com/us/book/9783319182711

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2015). Developing Modeling Competencies through the use of technology. En G. Stillman, W. Blum y M.S. Biembengut (eds.), *Mathematical Modelling in Education, Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 443-452). Nueva York, Estados Unidos: Springer. Recuperado de http://www.springer.com/us/book/9783319182711

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*, 314-338. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40540854016.pdf

Shanahan, M.C., Carol-Ann, L.E. y Francis, F. (2016). Using a Boundary Object Perspective to Reconsider the Meaning of STEM in a Canadian Context. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *16*(2), 129-139. http://dx.doi.org/10.1080/14926156.2016.1166296

Salinas, P. y Alanís, J.A. (2009). Hacia un paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *12*(3), 355-382. México. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Salinas, P., Alanís, J.A. y Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable. Reconstrucción para su enseñanza y aprendizaje. *DIDAC*, 56-57. México, Universidad Iberoamericana.

Smith, C. y Campbell, S. (2011). *A First Course in Differential Equations, Modeling & Simulation*. Taylor & Francis.

Tecnológico de Monterrey. (2005). *Visión misión 2015* (documentos del Sistema Tecnológico de Monterrey). Recuperado de http://www.itesm.mx/2015/recursos/2015-Vision-Mision.pdf

Tecnológico de Monterrey. (2017). *Modelo Tec 21* (documentos del Sistema Tecnológico de Monterrey).

Williams, D. (2007). The what, why, and how of contextual teaching in a mathematics classroom. The Mathematics Teacher, *100*(8), 572–575.

La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes

Mathematical modeling in teachers' training process

ZALDÍVAR ROJAS José David
QUIROZ RIVERA Samantha Analuz
MEDINA RAMÍREZ Gonzalo

Recibido: agosto 26 de 2017 | Aceptado para publicación: octubre 12 de 2017

Resumen

El presente estudio tiene como propósito promover la importancia de los procesos de aprendizaje e implementación del concepto modelación matemática en la formación docente inicial y/o continua. Para ello se describe una propuesta que tiene como fin el que los docentes experimenten y resuelvan una situación basada en modelación matemática tomando estos el rol de alumnos. Se discuten primeramente los aspectos teóricos que sustentan la propuesta y se presentan las dos fases que conforman

José David Zaldívar Rojas. Profesor de tiempo completo de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila, México. Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Miembro del Sistema Nacional de Investigadores en el nivel de candidato. Sus líneas de investigación se enfocan principalmente en estudios de construcción social del conocimiento matemático y sobre los procesos de desarrollo profesional del docente de matemáticas bajo una perspectiva de modelación. Correo electrónico: david.zaldivar@uadec.edu.mx.

Samantha Analuz Quiroz Rivera. Investigadora posdoctoral en el Departamento de Matemáticas de la Université du Québec à Montréal, Canadá. Doctora en Innovación Educativa con acentuación en Matemática Educativa por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel I. Sus líneas de investigación están enfocadas al estudio de la formación docente a través de la modelación matemática, así como al aprendizaje de conceptos matemáticos en ambientes socioculturales. Correo electrónico: samanthaq.rivera@gmail.com.

Gonzalo Medina Ramírez. Profesor de nivel medio superior y asesor de Ciencias Exactas en el Liceo Alberto del Canto, de Saltillo, México. Maestro en Docencia por la Universidad Autónoma del Noreste AC. Egresado de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Universidad Autónoma de Coahuila y actualmente cursa sus estudios de maestría en Matemática Educativa en la FCFM. Ha participado en diversos coloquios y simposios de educación matemática relacionados al uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas. Correo electrónico: gonzalo666@hotmail.com.

el estudio. Los resultados muestran un diseño de una situación basada en un contexto biológico cuyas tareas se inscriben propiamente en las etapas del proceso de modelación matemática. En dicha situación se incorpora una herramienta tecnológica con el propósito de favorecer el tránsito entre el planteamiento del problema y la generación de modelos matemáticos.

Palabra clave: MODELACIÓN MATEMÁTICA, FORMACIÓN DE DOCENTES, TECNOLOGÍA, PROBABILIDAD, PROPORCIÓN.

Abstract

The present study aims to favor the processes of learning and implementation of mathematical modeling notion pre-service and in-service teachers' training. In order to achieve so, we describe a proposal which main goal is teachers experiment and solve a situation based on mathematical modeling process by taking a student's role. We first discuss the theoretical aspects that support the proposal and present the two phases that make up the study. The results exhibit a design of a situation that takes place in a biological context whose tasks are properly inscribed in the phases of mathematical modeling process. In our example of situation, a technological tool is incorporated with the purpose of assisting the transit between the set out of the problem and the production of mathematical models.

Key Words: MATHEMATICAL MODELING, PRE-SERVICE TEACHERS, INSERVICE TEACHERS, TECHNOLOGY, PROBABILITY, PROPORTION.

Introducción

De acuerdo con Flores (2006), una condición para que el investigador se convierta en un agente de cambio educativo es la vinculación con escuelas donde se apoye al docente en la incorporación de resultados de investigación en su práctica diaria. Específicamente, parte de la investigación en didáctica de las matemáticas ha hecho numerosas aportaciones al estudio de situaciones y estrategias para la enseñanza de contenidos matemáticos; sin embargo, incorporar estas situaciones en un salón de clases demanda la vinculación constante con los docentes a través de reflexiones en su formación inicial y continua.

La presente investigación está centrada en una estrategia que ha demostrado su efectividad para el aprendizaje de las matemáticas a través de sus aplicaciones: la modelación matemática. En su acepción como estrategia didáctica, la modelación matemática surge como un medio que permite la creación o uso de modelos matemáticos a través del planteamiento de problemas en contexto (Niss, Blum y Galbraith, 2007). La implementación de esta estrategia en diversos niveles educativos ha demostrado, entre otras cosas, el desarrollo de competencias matemáticas y propias de la modelación matemática (Rodríguez y Quiroz, 2015), la promoción de un mayor interés hacia la asignatura (Alsina, 2007), así como el desencadenamiento de un pensamiento diversificado en los alumnos (Hitt, 2013).

Es por ello que currículos de diversos países han incorporado como un objetivo principal del perfil de egreso el desarrollo de competencias de modelación matemática. A manera de ejemplo, México, a través de la Reforma Integral de Educación Básica del año 2009, manifiesta la necesidad de que los alumnos modelicen situaciones de la vida cotidiana desde el preescolar hasta la secundaria (SEP, 2011). Por otro lado, la OCDE la considera dentro de los estándares evaluados en la prueba PISA (OCDE, 2010).

Ahora bien, una correcta aplicación de la modelación matemática en el aula de clases demanda un docente preparado y convencido para tal acción. A pesar de ello, la modelación matemática sigue ausente en la mayoría de los currículos de la formación inicial de docentes. Esto implica que sin la debida formación y desarrollo continuo, el docente sería incapaz de desarrollar planeaciones didácticas basadas en la modelación matemática y por consiguiente ser exitoso en su aplicación.

Ahora bien, la presente investigación reconoce que el aprendizaje de la modelación matemática por parte de los docentes no debe restringirse al conocimiento de la definición de la misma. Es necesario un trabajo de reflexión sobre la práctica que permita al docente valorar los beneficios de la modelación, reconocer las dificultades de su implementación y modificar sus concepciones respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, puesto que en la mayoría de los casos están ligadas a procesos memorísticos de transmisión de conocimiento (Quiroz, Hitt y Rodríguez, 2015).

Por lo tanto, en el presente estudio se plantea una propuesta para el estudio e implementación de la modelación matemática en la formación inicial o continua de docentes. A través de esta propuesta se busca que los docentes experimenten una situación basada en la modelación matemática con el fin de que reconozcan sus características y particularidades, así como el tipo de tareas que se pueden generar. En un primer momento se muestra la justificación teórica de la propuesta para después presentar los momentos y tareas específicas que la conforman. Dentro de estas tareas se involucra una componente tecnológica con el fin de valorar la incorporación de estos recursos en el desarrollo del ciclo de modelación utilizado.

La noción de modelación matemática

El estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han mostrado la necesidad de promover actividades en el aula que vayan más allá de un cúmulo de saberes aislados y algoritmos descontextualizados realizados mecánicamente, como tiempo atrás se creía. Está demostrado que las fallas en la impartición de matemáticas puras que dejan las aplicaciones para otras asignaturas, conllevan a bajo rendimiento de los alumnos por la carencia de aprendizaje (Santos, 1997).

De acuerdo con Alsina (2007), es necesario recordar la razón principal por la que son enseñadas las matemáticas: lograr que los alumnos se conviertan en seres capaces de aplicar las matemáticas y transferir dichos conocimientos en una variedad de contextos y situaciones fuera de la escuela. Por ello, la habilidad de identificar y resolver problemas en su ambiente cultural es un objetivo importante en la asignatura de matemáticas, ya que con ello se logrará preparar ciudadanos críticos y buenos profesionistas en cualquier contexto que se les presente (Muller y Buskhardt, 2007).

En nuestra investigación consideramos al aprendizaje de la matemática como un proceso donde se encuentra sentido a las relaciones, se separan y analizan para discutir sus conexiones con otras ideas, como lo refieren Niss *et al.* (2007). Así, se muestra como necesaria la realización de cambios significativos en la manera de pensar de los estudiantes sobre las matemáticas mediante la presentación de situaciones donde se fomente la expresión de ideas y confrontación de procedimientos.

Con el fin de alcanzar estos objetivos, se inicia el estudio de una estrategia que potencia el vínculo entre la matemática escolar y la experiencia de vida de los estudiantes: la modelación matemática (Lesh y Yoon, 2007). La definición de la modelación matemática se ha ido enriqueciendo desde que Pollak en 1969 puntualizó los pasos o etapas que la conformaban:

- Identificar una pregunta del mundo real que se quiere entender.
- Seleccionar objetos particulares importantes para la pregunta hecha e identificar relaciones entre ellos.
- Decidir cuáles son útiles e ignorar los que no lo son.
- Trasladar esta versión en términos matemáticos, obtener fórmulas matemáticas para esta pregunta determinada y resolver el problema.

Posteriormente, Blum y Niss (1991) completan esta acepción considerando a la modelación matemática como el proceso completo de transitar desde un problema planteado en una situación real hasta un modelo matemático. En la presente investigación consideraremos la definición de Trigueros (2006), quien la detalla como un proceso cíclico donde se proporciona a los alumnos problemas abiertos y complejos en los que se ponen en juego conocimientos previos y habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en términos matemáticos.

Para la investigación son tres momentos principales los que deben seguirse en clases basadas en modelación matemática:

- Momento 1. Introducción al contexto real.
- Momento 2. Matematización de la situación a partir de los datos del contexto.
- Momento 3. Síntesis y regreso al contexto real.

Durante estos momentos, tanto docente como alumnos cumplen roles específicos que detallaremos a continuación:

a) Rol del alumno. De acuerdo con Lakoma (2007), existen tres tareas básicas de los alumnos en el proceso de modelación: realizar predicciones y conclusiones, generalizarlas, justificarlas y aplicarlas a la práctica y, por último, presentarlas a otras personas. Durante este proceso los alumnos sugieren situaciones de su realidad y crean modelos para dichos escenarios específicos. Estas acciones promueven el desarrollo de habilidades matemáticas y herramientas que les permitan representar, estimar, llegar a aproximaciones, analizar errores, razonar, revisar la inconsistencia de soluciones y comunicar sus resultados (Pollak, 2007).
b) Rol del docente. Los resultados de Doerr (2007) muestran que las actividades del docente en modelación matemática estriban en la elección de la situación que se va a modelar de acuerdo con el contenido que desea tratar, buscando la situación más apropiada, la proposición de situaciones donde los alumnos puedan interpretar, explicar y justificar modelos matemáticos, así como motivar a compartir su manera de pensar.

Ahora bien, estos roles se realizan dentro de un aula de clase que privilegie el aprendizaje colaborativo. Así, se invita a conjuntar esfuerzos, intereses, talentos y competencias para el cumplimiento de metas establecidas en conjunto por los miembros del grupo que apoyan la comprensión de los problemas y procedimientos de solución. El trabajo colaborativo en la modelación matemática permite interacciones que favorecen un ambiente social y la promoción de discusiones para la solución de problemas más complejos (Alsina, 2007).

Por último, el ambiente en el salón de clase debe permitir la descripción de los modelos individualmente, en equipo o grupalmente. El aula de clase se convierte en un espacio creativo donde el aprendizaje se construye por todos los miembros del grupo, se promueve la participación en la discusión de problemas y la propuesta de ejemplos y contraejemplos; es decir, la construcción del conocimiento matemático (Santos, 1997).

Tomar en cuenta las características y rasgos relevantes del trabajo con la modelación matemática es indispensable para la obtención de logros en su aplicación.

La modelación matemática en la formación docente

De acuerdo con Latapí (2003), alcanzar una mejora en la educación requiere retomar como asunto central la formación de los maestros, puesto que este proceso constituye la vía por la que el sistema renueva sus prácticas, cuestiona sus tradiciones, acepta nuevas visiones teóricas, se abre al conocimiento y se revitaliza. A pesar de ello, la formación docente es considerada uno de los elementos más débiles del sistema educativo, puesto que en su mayoría contempla programas obsoletos y el empleo de métodos de enseñanza rutinarios (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004). Por tanto, lograr cambios en las aulas de clase de matemáticas será posible a través de cambios en la formación de docentes (Alsina, 2007).

Es necesario reconocer que la formación de docentes en la enseñanza de las matemáticas en general se ha convertido en un tema pedagógico central en los últimos años. Los esfuerzos se encaminan a la creación de nuevos espacios donde el docente tenga la oportunidad de reflexionar sobre su enseñanza, lo cual requiere una madurez considerable respecto al conocimiento que domina, la pedagogía de las matemáticas que posee y del aprendizaje del alumno (Wilson y Cooney, 2002). Da Ponte (2012) menciona que una enseñanza de las matemáticas de calidad pasa necesariamente por un profesor con una formación matemática apropiada, con competencias en el campo didáctico, con una buena relación con los alumnos, una actitud profesional y su capacidad de actualización a nivel profesional.

Actualmente, el reto de la educación docente estriba, pues, en diseñar una pedagogía que facilite el empleo de métodos constructivistas para la enseñanza de matemáticas en todos los niveles; es decir, preparando a docentes que enseñen matemáticas para su entendimiento y su aplicación y no su memorización (Nyaumwe, 2004).

En relación a la modelación matemática, su incorporación al currículo del profesor es considerado indispensable para el desarrollo de competencias docentes relativas a esta estrategia, como por ejemplo para el establecimiento de ambientes y el planteamiento de situaciones de modelación (Niss *et al.*, 2007). Sin embargo, las investigaciones demuestran que la mayoría de los programas educativos de maestros en formación no proveen conocimientos y experiencias que provoquen confianza en los docentes para lidiar con esta estrategia didáctica en el aula de clases (Alsina, 2007; Doerr, 2007).

A pesar de que es clara la necesidad de incorporar la modelación matemática al currículo de la formación docente, Doerr (2007) establece que son pocos los estudios que se enfocan en las formas en que se podría realizar esta incorporación. De hecho, Niss *et al.* (2007) afirman que es muy complejo encontrar *actividades de modelación genuinas* dentro del salón de clases de matemáticas. Según Ruiz-Higueras y García (2011), existe una escasez de investigaciones centradas en clarificar y aumentar el conocimiento científico sobre las metodologías involucradas en los procesos de modelación por parte de los docentes, así como la ausencia de teorías científicas que permitan describir con precisión y categorizar dichas metodologías.

Rescatamos dos investigaciones que proponen metodologías para el trabajo con docentes en formación con la modelación matemática. El estudio de Quiroz, Hitt y Rodríguez (2015) muestra que la incorporación de la modelación matemática al currículo de la formación docente debe ser un proceso gradual de reflexión donde los futuros docentes tengan oportunidad de evolucionar sus concepciones respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este proceso debe relacionar no solo aspectos teóricos relativos a la modelación, sino a su vez brindar oportunidades de poner en práctica la estrategia a través de la planeación e implementación de una lección de matemática con alumnos en aulas de clase. Estas oportunidades permitirán que el docente reconozca no solo los beneficios de la modelación matemática, sino que a su vez reflexione respecto a las dificultades de su incorporación.

Por su parte, Hitt (2013) desarrolla la metodología de enseñanza denominada Acodesa (aprendizaje en colaboración, debate científico y autorreflexión). Dicha metodología tiene como objetivo promover habilidades y capacidades de reflexión ante situaciones problemáticas mediante el modelado en ambientes colaborativos, en los cuales el debate científico y la autorreflexión juegan un papel de primer orden. Esta metodología promueve el trabajo con situaciones problemas basadas en modelación matemática. A través de Acodesa se ha dado lugar al desarrollo de cuerpos de actividades de aprendizaje dirigido a la formación de profesores como apoyo para la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, como el caso de la investigación de Rodríguez y Soto (2011).

El uso de tecnología y la modelación matemática

La sociedad de la información y la comunicación de la que formamos parte, nos hace imposible no tener en consideración en las estrategias didácticas el involucramiento de tecnología. Al hablar de modelación matemática, los investigadores han incorporado a la tecnología como parte importante del mismo proceso en las aulas de clase de diversos niveles educativos.

Como resultado de esta incorporación está el despliegue de la autonomía de los alumnos respecto del docente, además del desarrollo de habilidades como la búsqueda de información y una mayor participación e interés en la clase (Castañeda, 2010). Por su parte, Medina (2011) indica en su trabajo la importancia del uso de tecnologías de la información en el desarrollo de competencias tanto matemáticas como de modelación matemática.

El momento preciso en el ciclo de modelación matemática para la incorporación de la tecnología ha sido estudiado por autores como Rodríguez y Quiroz (2015), cuyos resultados indican tres momentos importantes donde la tecnología puede apoyar el proceso de modelación matemática:

- Al momento de plantear una situación real. La tecnología podría apoyar a la mejor comprensión de la situación-problema que se plantea.
- Al momento de la formación de un modelo matemático. En este momento los recursos tecnológicos brindarían al alumno elementos para acercarse a la creación de un modelo matemático, e incluso vislumbrar la respuesta sin tener aún el resultado analítico.
- Al momento de vincular los resultados matemáticos con la situación real. La tecnología permite analizar la respuesta matemática en términos de la misma situación real. Además, apoya la identificación de posibles errores en los resultados del trabajo con el modelo matemático.

Así, estos resultados brindan directrices para la planificación de secuencias didácticas basadas en modelación matemática que incorporen un recurso tecnológico. Si se piensa en la formación docente, el uso de dispositivos tecnológicos apoyará el reconocimiento de las bondades de estos en el aula de clase de matemáticas, puesto que este tipo de inserciones modifican indudablemente la forma en la cual se producen, transmiten y se procesa la información y el conocimiento en los salones de clases, ya que afectan directamente al currículo, lo cual repercute –o debería repercutir– en la formación de los docentes (Llinares, 2012).

Propuesta para la incorporación de la modelación matemática en la formación docente

La presente propuesta tiene como objetivo apoyar el proceso de aprendizaje y utilización de la modelación matemática desde la formación de docentes. Es conocido que las estrategias didácticas que los docentes utilizan en sus aulas de clase están basadas en sus teorías sobre cómo esta asignatura debe ser aprendida. Estas ideas han sido desarrolladas con base en su experiencia sobre cómo fueron enseñados (Da Ponte, 1994). De acuerdo con el estudio de Quiroz *et al.* (2015), el aprendizaje de la modelación matemática por los docentes en formación puede realizarse a través de un trabajo en colaboración entre docentes donde se dé oportunidad de planificar e implementar secuencias didácticas con elementos de modelación.

Se presenta a continuación una propuesta para promover el aprendizaje y utilización de la modelación matemática desde la formación de docentes. Se busca así contribuir en el avance de teorías científicas que describan y expliquen la actividad del profesor en el aula durante los procesos de estudio en los cuales los alumnos se enfrenten a situaciones de modelización matemática (Ruiz-Higueras y García, 2011).

La propuesta consiste en el planteamiento de situaciones basadas en modelación que deban ser resueltas por los mismos docentes, experimentando por ellos mismos el rol del alumno. Estas situaciones deberán ser seguidas de un proceso de reflexión sobre lo ocurrido: el tipo de situación que se planteó, la adecuación del contexto, el rol del docente durante la experiencia, el rol de los alumnos, el proceso de creación, uso de un modelo matemático, la organización en el aula, el clima de aprendizaje, así como el uso de tecnología. De acuerdo con García (2005), el planteamiento y resolución de situaciones-problema mediante el trabajo en grupo promoverá un análisis o discusión en colectivo que brindará herramientas para una reflexión posterior respecto a la misma estrategia utilizada. Al experimentar las situaciones de modelación, se espera que los docentes desarrollen aprendizajes "haciendo", como propone Llinares (2012). Por otro lado, Ferreira y Miorim (2008) muestran que las reuniones de reflexión en colaboración entre docentes permiten la superación de problemáticas presentadas en las aulas, además de la incorporación de nuevas estrategias.

Ahora bien, las situaciones elegidas deberán estar acordes con contextos no matemáticos atractivos para los mismos docentes y que les generen un reto en sus conocimientos matemáticos. Esta selección será realizada por el profesor formador de docentes tomando en cuenta las características de sus alumnos, así como sus intereses. Además de ello, es recomendable que las situaciones involucren el uso de un recurso tecnológico, puesto que con ello será posible la discusión posterior relativa a la utilidad de este durante el proceso de resolución.

Las situaciones propuestas a los docentes, por tanto, deberán ser preparadas con anticipación, buscando que estas abarquen los tres momentos del proceso de modelación matemática: 1) introducción al contexto real; 2) matematización de la situación a partir de los datos del contexto; y, 3) síntesis y regreso al contexto real. Respecto a la incorporación de la tecnología, esta es recomendable hacerse siguiendo las sugerencias del estudio de Rodríguez y Quiroz (2015): al momento de plantear una situación real, al momento de la formación de un modelo matemático y al momento de vincular los resultados matemáticos con la situación real.

El formador de docentes podrá valerse de contextos que involucren otras asignaturas, promoviendo una transversalidad dentro del currículo. Ahora bien, el formador deberá conocer los aspectos teóricos y prácticos de la modelación matemática, puesto que fungirá el papel del docente de matemáticas promoviendo en todo momento la discusión de ideas entre los docentes en formación y guiándolos a través de la sesión de clase.

En el proceso de resolución de estas situaciones se busca promover en los docentes en formación una experiencia reflexiva, donde se les presenten retos cognitivos que les demanden la toma de decisiones e intervención en la clase. Por ello, se buscará que sean ellos quienes propongan soluciones y desarrollen un modelo matemático a fin de dar respuesta a este. Este proceso, de acuerdo con las características propias de la modelación mencionadas en la sección anterior, se debe realizar a través de un aprendizaje colaborativo entre futuros docentes.

La reiteración de estas experiencias brindará al docente más oportunidades para reflexionar sobre las mismas bondades y dificultades del trabajo con modelación desde el punto de vista del docente y desde el punto de vista del alumno. Entre estas dificultades se espera que se discutan algunas que ya fueron reportadas en diversas investigaciones, como lo son: un mayor tiempo para la clase de matemáticas en comparación con el uso de métodos tradicionales (Alsina, 2007), problemáticas propias del aprendizaje colaborativo, dificultad para seleccionar problemas apegados a la realidad del alumno (Henn, 2007), la desvinculación con evaluaciones tradicionales que solo valoran la destreza en la resolución de algoritmos (Henn, 2007) y problemas ligados a la necesidad de adquisición de equipamiento tecnológico en el aula (Pead, Ralph y Muller, 2007).

Consideraciones metodológicas

La presente investigación es de tipo cualitativa, puesto que tiene como intención comprender de manera detallada el tema de estudio de voz de los individuos que participan (Creswell, 2007). El diseño del estudio está organizado en dos fases principales, que como en toda investigación cualitativa pueden ser modificadas si así se requiere. Estas fases son las siguientes:

1. Fase de diseño. Primeramente se pretende diseñar una situación problema basada en modelación matemática para el trabajo con los docentes en formación. El diseño deberá seguir los aspectos teóricos referentes al proceso de modelación matemática que fueron referidos en las primeras secciones del artículo. Además, se pretende la selección y el involucramiento de una tecnología de acuerdo con los fines que se persigan, relacionados al contenido matemático.
2. Fase de implementación y análisis de resultados. Durante esta fase se pretende implementar el diseño realizado en la formación de docentes inicial y/o continua. Después de la resolución de la situación-problema se realizará una sesión de reflexión con los docentes sobre las actividades que se siguieron. Los resultados obtenidos serán analizados a la luz de los elementos teóricos. Los resultados permitirán mostrar la eficacia de esta implementación para el desarrollo de la noción de modelación matemática en la formación de docentes.

El presente artículo muestra los resultados de la primera fase del estudio; es decir, el diseño de la situación-problema. El objetivo principal es el diseño de una secuencia basada en modelación matemática que tome en cuenta los aspectos teóricos de la estrategia y el involucramiento de una tecnología de apoyo con el fin de promover el proceso de aprendizaje de la modelación matemática en docentes en formación inicial y continua. Se presenta en la siguiente sección el resultado de tal diseño.

Diseño de la situación basada en modelación matemática

Presentación de la situación y objetivo general

La situación que a continuación se presenta se denomina “La genética de acuerdo con las leyes de Mendel”, y el contexto bajo el que se inscribe se encuentra en la biología, específicamente en genética relativo a la segunda ley de Mendel. La temática del contexto se eligió de esa manera debido a su característica de transversalidad entre asignaturas. Abordar el planteamiento de la situación desde la biología y sin incluirlo en el título busca a su vez no explicitar el uso de matemáticas en el mismo planteamiento. Aunado a lo anterior, el tema aparece desde los primeros grados escolares y es recursivo en los siguientes años, aunque con diferentes niveles de profundidad. Además de que las aportaciones de Mendel representan un parteaguas en la biología que permitió el desarrollo de una rama de esta: la genética (Darden, 1991; Lorenzano, 2005; Gliboff, 2015).

El objetivo general de la situación de modelación matemática “La genética de acuerdo con las leyes de Mendel” es simular el comportamiento de la segunda generación de híbridos de cierta especie de guisantes, los cuales son el resultado de la primera cruza de dos guisantes puros, uno amarillo (gen dominante) y otro verde (gen recesivo). Se espera que a partir de dicha simulación los estudiantes puedan explicar intuitivamente la segunda ley de Mendel (ley de la segregación de los caracteres en la segunda generación filial), la cual establece que durante la formación de los gametos, cada alelo de un par se separa del otro miembro para determinar la constitución genética del gameto filial (Valega, s.f.).

Los conceptos matemáticos que son posibles abordar en la situación son: proporcionalidad, razones, eventos aleatorios, histogramas de frecuencia, probabilidad clásica, porcentajes, entre otros. Durante la actividad, la tecnología es incorporada en el momento de la formación del modelo matemático a partir de los datos reales y en la síntesis y regreso a la situación real. Esta elección favorece el tránsito entre las etapas de la modelación, como lo señalan Rodríguez y Quiroz (2015), y además ofrece alternativas de solución y el desarrollo del pensamiento matemático (Villarreal, 2012).

Materiales necesarios y visión general de la secuencia

Los materiales que se proponen para el desarrollo de la situación de modelación matemática son:

- Calculadora ClassPad Fx400 o similar (podría ser usada también algún programa de hoja de cálculo; sin embargo, las secuencias de comandos podrían variar).
- Fichas pintadas de un lado verde y del otro amarillo.
- Hoja de trabajo del alumno.

Los momentos y las tareas que componen a la situación "La genética de acuerdo con las leyes de Mendel" se detallan en la figura 1. Posteriormente se describe con mayor detalle cada tarea relativa a los tres momentos de la secuencia didáctica.

Fig. 1. Momentos y tareas de la secuencia didáctica.

"La genética de acuerdo con las leyes de Mendel"

Momento 1. Introducción al contexto real
- T1.1. Presentación del contexto biológico en el que se inscribe la situación.
- T1.2. Realizar la pregunta detonadora de la situación.

Momento 2. Se matematiza la situación y se realizan simulaciones: generación de una conjetura.
- T2.1. Realizar simulaciones lanzando una moneda para entender el comportamiento de los eventos involucrados en la situación en equipos de dos personas.
- T2.2. Reflexionar sobre los resultados obtenidos en los diferentes equipos y sobre su validez.
- T2.2. Simular la situación aleatoria con apoyo de la tecnología.
- T3.3. Reflexionar sobre las simulaciones y las gráficas obtenidas.
- T3.4. Comprobar conjeturas con otros equipos de trabajo.

Momento 3. Síntesis y regreso al contexto real: se comprueba la conjetura.
- T3.1. Determinar las proporciones en las cuales se comporta la población de análisis.
- T3.2. Proponer a partir de los resultados una explicación intuitiva de la segunda ley de Mendel.

Análisis de los momentos y tareas que componen la secuencia

Momento 1: introducción al contexto real

T1.1. Realizar la lectura del contexto biológico en el que se inscribe la situación

El contexto real que se le propone al estudiante tiene que ver con la aparición de la genética y los trabajos de Gregory Mendel, que permitieron el desarrollo de la teoría genética, siendo precursor de dicha parte de la biología (Darden, 1991). En esta tarea se explica de manera general la historia de Gregory Mendel y su trabajo. Además se inicia el involucramiento de conceptos biológicos como: genes, alelos, gen dominante, gen recesivo, genotipo, fenotipo, cruza híbrida, primera ley de Mendel. Esta presentación puede realizarse por medio de una lectura o bien por medio de un video. En esta tarea es posible el involucramiento del profesor de ciencias o biología, dependiendo del nivel educativo. En la figura 2 se muestra una visión general de la presentación del contexto.

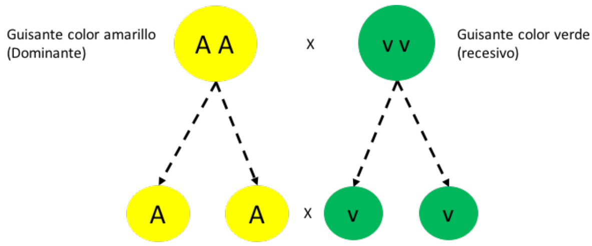
Actualmente, la genética es un campo de estudio con vertiginosos avances en la clonación con éxito de seres vivos. Pero estos avances no pudieron lograrse sin las investigaciones realizadas por el monje Gregory J. Mendel (1822-1884), de origen austriaco, quien cruzó guisantes de color amarillo con una especie escasa de guisante verde. El resultado de este experimento dio origen a una generación híbrida de guisante amarilla al 100%, lo cual quiere decir que todos los elementos que resultaron de esta primera cruza fueron híbridos, pero amarillos. Lo anterior condujo a Mendel a establecer más experimentos y a la postre conjeturar relaciones hasta lo que hoy conocemos como las leyes de Mendel.

Es importante reconocer que las investigaciones de Mendel sentaron las bases para el estudio de cómo los seres vivos se "mezclan" y producen "nuevas" generaciones con atributos comunes y cómo también ciertas especies "pierden" atributos. Además, para la ciencia los trabajos de Mendel constituyeron avances importantes en aspectos metodológicos y experimentales, puesto que Mendel reconoció la necesidad de una experimentación rigurosa y sistemática, además de expresar sus resultados en forma cuantitativa mediante recursos estadísticos, lo cual fue un parteaguas en los trabajos de biología de la época.

Antes de los trabajos de Mendel se tenía en consideración una teoría que se conocía como la herencia por mezcla, la cual suponía que los caracteres de los padres y las madres se mezclaban; es decir, si consideramos el cruce entre dos flores, una roja y una blanca, la flor resultante de la cruza será rosada. A esta teoría se le llamaba pangénesis.

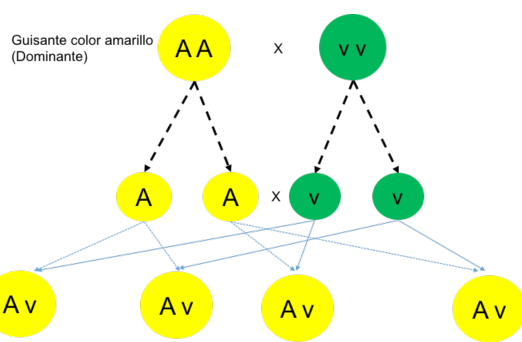
A continuación intentaremos reflexionar sobre los trabajos de Mendel intentando aproximarnos a las conjeturas que planteó. Para ello centraremos nuestra atención en el gen que determina el color de un guisante.

Los genes se presentan por pares. Por ejemplo, en el guisante amarillo, el par asociado de genes se considera (A, A), el cual será tomado como el gen dominante. Mientras que el gen del guisante verde está asociado al par (v, v). Al realizar una cruza de estas dos razas puras de guisantes, cada una aporta un gen para formar un nuevo par que determinará el color del guisante, al cual llamaremos híbrido, ya que no es "puro".



En síntesis, cuando Mendel hace mención de una cruza híbrida, se refiere a un guisante que se formó a partir de un gen aportado por un guisante amarillo dominante y un gen aportado por un guisante verde recesivo, ambos de raza pura. Lo anterior implica que cuando existe una cruza de guisantes, cada uno de ellos aportará un gen cada uno a la siguiente generación.

Ahora bien, como cada uno de los "padres" (o la raza pura) aporta un gen a la nueva generación siguiente, esta nueva generación tendrá nuevamente un par de genes, donde tendrá un gen aportado por el guisante amarillo y uno del guisante verde (pero recuerden que el guisante amarillo tiene un par de genes, al igual que el guisante verde). Lo anterior permite la aparición de una generación de guisantes híbrida amarilla al 100%, porque justo el gen A es el dominante y dará el color del guisante híbrido de la nueva generación (el fenotipo), aun cuando contenga un gen verde recesivo. Lo anterior se puede apreciar en la siguiente imagen:



Lo anterior también podría representarse por medio de un cuadro de Punnet:

Guisantes de Raza Pura	v	v
A	(A,v)	(A,v)
A	(A,v)	(A,v)

Fig. 2. Presentación del contexto real.

T1.2. Realizar la pregunta detonadora de la situación.

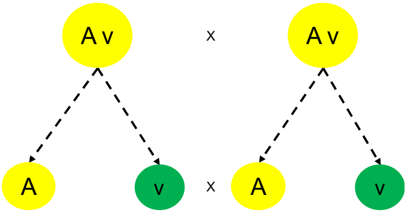
La pregunta detonadora está relacionada con la producción de una nueva generación de guisantes, pero usando la raza híbrida. El planteamiento es el siguiente:

Fig. 3. Planteamiento de la pregunta detonadora.

Ahora bien, como se puede apreciar en la tabla anterior, todos los guisantes de la primera generación tienen un par de genes, uno amarillo dominante y uno verde recesivo; es decir, sus genes son (A, v). La anterior relación dio pie a la primera ley de Mendel: principio de la uniformidad de los heterocigotos de la primera generación filial, la cual establece que si se cruzan dos razas puras (un homocigoto dominante con uno recesivo) para un determinado carácter, los descendientes de la primera generación serán todos iguales entre sí, fenotípica (lo visible) y genotípicamente (código genético), e iguales fenotípicamente a uno de los progenitores (de genotipo dominante).

Ahora bien, considera la siguiente pregunta y reflexiona junto con tus compañeros una posible conjetura: ¿qué sucedería si ahora producimos una nueva generación de guisantes, pero usando a los miembros de la raza híbrida?

Para el caso que planteamos de la cruza de dos guisantes híbridos, se tiene que considerar en un inicio un par de guisantes heterocigotos, cuyos genes son de la siguiente manera: (A, v) y (A, v).



Cuando Mendel realizaba los experimentos de este tipo pudo observar que obtenía muchos guisantes con características de piel amarilla y mucho menos con características de piel verde.

Momento 2. Se matematiza la situación y se realizan simulaciones: generación de una conjetura

T2.1. Matematizar la situación

En esta tarea se debe dar inicio a cuestionamientos sobre la naturaleza del fenómeno a enfrentar, específicamente que el color del guisante resultado de la cruza de un par de guisantes híbridos son eventos de un experimento aleatorio.

Algunas preguntas que pudieran motivar la reflexión podrían ser como las siguientes:

- ¿Qué posibles características podrían tener los guisantes de la segunda generación proveniente de este par de guisantes híbridos de primera generación?

- ¿De qué manera podría averiguar Mendel qué tantos de los posibles resultados de guisantes de segunda generación serán amarillos y qué tantos serán verdes?

Se espera de esta manera promover la reflexión sobre la importancia de la experimentación, en este caso combinar guisantes de la primera generación para ver los resultados y reflexionar sobre ellos. Las siguientes preguntas intentan favorecer una experimentación en el salón de clases y analizar los posibles resultados.

- ¿Se podría realizar la experimentación en el aula?
- ¿Qué posibles resultados se podrían tener?

T2.2. Realizar simulaciones del experimento aleatorio usando el lanzamiento de fichas coloreadas para entender el comportamiento de los eventos involucrados en la situación

Durante la implementación de la situación es importante simular el experimento de la cruza de dos guisantes híbridos con ayuda de lanzamientos de fichas (un lado verde y uno amarillo), los cuales significarán la aparición de los genes de dos guisantes híbridos y la cruza obtenida. Para ello se pide un trabajo en parejas para realizar lanzamientos de las fichas que simulen los dos genes (verde o amarillo) de los guisantes:

- Amarillo-amarillo. Da como resultado un guisante amarillo.
- Amarillo-verde. Da como resultado un guisante amarillo.
- Verde-amarillo. Da como resultado un guisante amarillo.
- Verde-verde. Da como resultado un guisante verde.

Es importante realizar al menos diez lanzamientos por pareja. Se sugiere registrar los resultados en una tabla como la que se presenta en la figura 4.

Fig. 4. Tabla para registrar los resultados del lanzamiento de las fichas de colores.

Resultado de las fichas	**Número de veces que aparece**
Amarillo-amarillo	
Amarillo-verde	
Verde-amarillo	
Verde-verde	

Una vez que los equipos hayan completado su tabla, se puede cuestionar sobre el comportamiento de los guisantes obtenidos de la cruza. Por ejemplo, se puede pedir que en equipos realicen las actividades sugeridas y respondan las preguntas:

- ¿Coinciden tus resultados con los obtenidos en las tablas de tus compañeros?, ¿por qué?
- ¿Qué comportamiento observas en el número de guisantes verdes obtenidos de la cruza?
- ¿Y con respecto a los guisantes de color amarillo obtenidos de la cruza?
- Elabora una tabla realizando 50 simulaciones.
- ¿Qué sucedería si realizaras 250 simulaciones usando las fichas?

Las preguntas anteriores promueven reflexiones sobre la importancia de aumentar el número de experimentos dentro de la simulación de los casos y que la búsqueda de patrones en los comportamientos de los posibles valores que se obtienen de la cruza genera una comprensión de la forma en la cual se distribuye la población de la nueva generación. Pero a su vez plantea la necesidad de contar con una manera óptima de realizar simulaciones. Ante ello el profesor resalta el papel que puede tener la tecnología en la realización de las simulaciones.

T2.3. Simular la situación aleatoria con apoyo de la tecnología

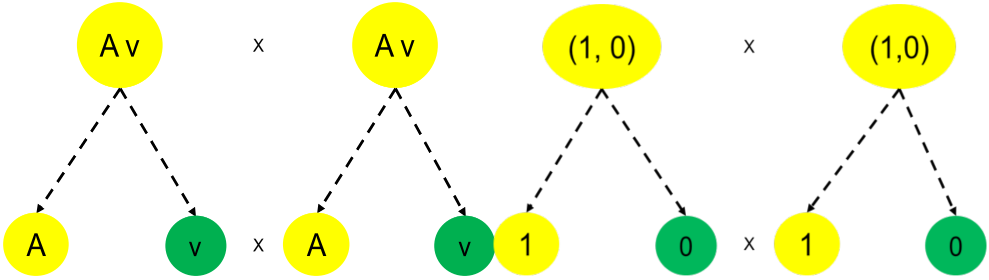
Para esta tarea se espera contar con la tecnología propuesta; sin embargo, se pueden usar en su lugar hojas de cálculo. Se muestra a continuación una secuencia de pasos utilizando una calculadora FX-CP400, la cual permite simular hasta 500 experimentos.

Se sugiere el uso de la función "número aleatorio" en la calculadora, en la cual el dispositivo aleatoriamente elije un número de entre los que se seleccionen. Ahora bien, la tecnología brinda un obstáculo a los alumnos, ya que esta demanda la representación mediante números y no colores. Ante ello se espera que los alumnos reflexionen sobre el procedimiento para hacer este cambio:

- ¿Qué números podrían utilizarse para sustituir los colores?
- ¿De qué manera podrán combinarse estos números?
- ¿Cuántas posibles respuestas debe generar esta combinación?

Esta reflexión dirigida por el docente puede llevar a proponer que el color amarillo (gen dominante) y al color verde (gen recesivo) se les puede representar como un 1 y un 0, respectivamente.

Fig. 5. Genes dominantes y recesivos representados mediante números: se matematiza la relación.



Si al llevar a cabo las cruzas se realizan las sumas de estos genes, es posible obtener tres resultados diferentes: 0, 1 y 2. Estos resultados significan lo observado en la tabla de la figura 6.

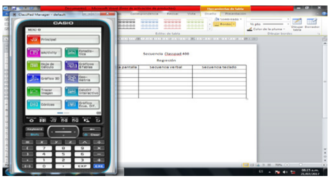
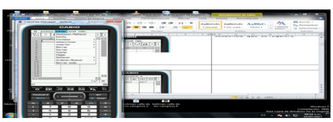
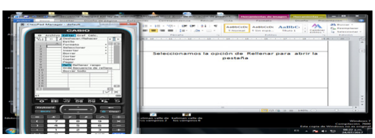
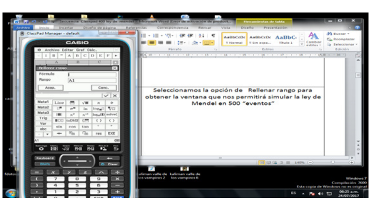
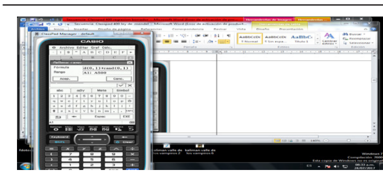
Genes	Representación con números	Resultado de la suma	Interpretación
Amarillo-amarillo	1, 1	2	Guisante amarillo puro
Amarillo-verde	1, 0	1	Guisante amarillo híbrido
Verde-amarillo	0, 1	1	Guisante amarillo híbrido
Verde-verde	0, 0	0	Guisante verde puro

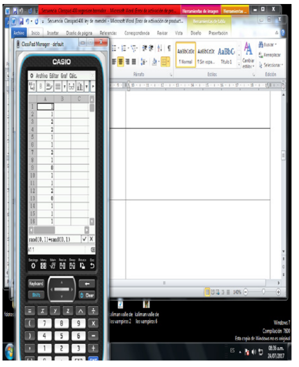
Fig. 6. Resultados posibles de la cruza de guisantes de la segunda generación.

En la calculadora se usará una hoja de cálculo donde se registrarán los resultados de los experimentos aleatorios, considerando la suma de cualquiera de estos dos valores, ya que esta representa la cruza. Cada celda de la hoja de cálculo significará entonces cada uno de los descendientes de la cruza de dos guisantes híbridos.

En la tabla 1 mostramos la primera parte de la secuencia de pasos usando la tecnología, que consiste en el llenado de la tabla usando los números aleatorios:

Tabla 1. Secuencia del uso de la calculadora para la generación de números aleatorios

Secuencia gráfica pantalla	Secuencia
	Pulsar el ícono de hoja de cálculo dentro del menú de inicio.
	Pulsar el ícono de editar para poder completar la secuencia que se requiere.
	Seleccionar la opción de “Rellenar” y abrir la pestaña.
	Seleccionar la opción “Rellenar rango” para obtener la ventana que nos permitirá simular 500 eventos.
	En la ventana “Rellenar rango” se completará con la siguiente fórmula que considera la suma de dos números aleatorios enteros entre el 0 y el 1: rand(0,1) + rand(0,1). En el apartado “Rango” se pondrá el número de eventos que se requieren; en nuestro caso consideraremos el máximo. Para ello escribimos lo siguiente: A1:A500, que hace referencia a la columna donde se encontrarán nuestros datos generados por la calculadora.
	Después de teclear la secuencia que nos permite realizar las simulaciones, pulsar “Aceptar” para generar las 500 simulaciones.



En la imagen contigua se puede observar un listado donde aparecen ceros, unos y dos. El cero representa un guisante de la nueva generación con un par de genes recesivos (v, v), el uno representa un guisante híbrido con un gen dominante (A, v) o (v, A), y el número dos representa un guisante con un par de genes dominantes (A, A).

Momento 3. Síntesis y regreso al contexto real: se comprueba la conjetura

T3.4. Reflexionar sobre las simulaciones y las gráficas obtenidas

En esta tarea se busca cuestionar la forma en la cual se distribuía la población que Mendel obtenía. Al inicio de la situación se mencionó que el austriaco obtenía muchos guisantes con características de piel amarilla y mucho menos con características de piel verde. Ahora, a través de los resultados generados por la calculadora se puede corroborar este hecho y explicar el porqué, pero además usando para ello representaciones gráficas como histogramas de frecuencias (ver tabla 2).

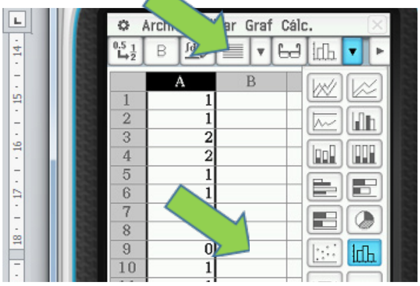
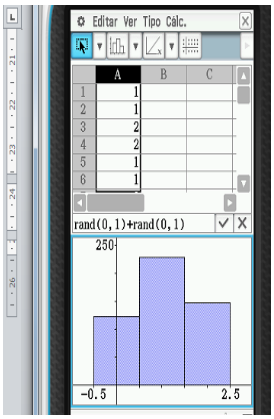
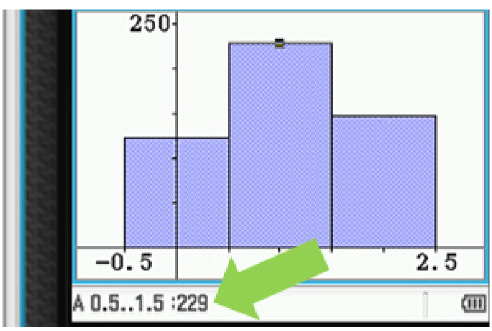
No obstante a la actividad de simulación que se realizó es importante discutir la necesidad de realizar otras más, puesto que sin importar el número de veces que se simule, la población se distribuirá de la misma manera, con una tendencia clara a establecer las relaciones de 3 a 4 de guisantes amarillos y 1 a 4 de guisantes verdes. Para ello se puede solicitar a la calculadora que "recalcule" la simulación; esto es, que realice nuevamente los 500 experimentos aleatorios. Esto generará nuevos eventos; sin embargo, la distribución de la población no variará, en proporción, ya que se continuará conservando una tendencia hacia las proporciones que se mencionaron anteriormente.

De esta manera la tecnología provee un apoyo visual respecto a la distribución de la población de guisantes de esta generación derivada de la cruza de dos guisantes híbridos de primera generación. La reflexión se encamina a la consideración de la distribución de la cruza de dos guisantes híbridos considerando un cuadro Punnet como el mostrado en la figura 7.

Guisantes Híbridos	A	v
A	(A, A)	(A, v)
v	(v, A)	(v, v)

Fig. 7. Cuadro de Punnet para organizar la cruza de los guisantes híbridos de la primera generación.

Tabla 2. Secuencia del uso de la calculadora para la generación de una gráfica

Secuencia gráfica pantalla	Secuencia
	Para observar en una gráfica de barras cómo se distribuyen los resultados de la simulación, primero seleccionar la columna A; posteriormente pulsar el ícono de tipos de gráficos; después seleccionar el gráfico de barras.
	La primera columna de la gráfica se refiere a la cantidad de “ceros” aleatorios que aparecen en la población; la siguiente columna la cantidad de “unos” y la última columna al número de “dos” que aparecieron.
	En la parte inferior de la gráfica se visualizan cuántos “ceros” aparecen en la distribución de la población. Lo anterior se puede hacer con cada una de las columnas, de manera que se tienen cuántos ceros, unos y dos hay en cada columna respectivamente.

En el cuadro de la misma figura 7 se puede ver que en los guisantes de la segunda generación es más probable que sean amarillos y menos el obtener un guisante verde. Lo anterior se debe a que tres de cuatro eventos resultaron en un guisante con un fenotipo amarillo, mientras que uno de cuatro resultó ser verde. Estas proporciones son las que derivaron en la segunda ley de segregación de Mendel, la cual estableció luego de una cantidad importante de experimentos (Valega, s.f.).

T3.5. Comprobar conjeturas con otros equipos de trabajo

Una vez que se haya mostrado la realización de diversas simulaciones, se debe hacer hincapié en la necesidad de la búsqueda de patrones. Para ello proponemos las actividades de la figura 8, que pueden motivar un análisis profundo de la forma en la cual se distribuyen los individuos de la nueva generación.

Fig. 8. Actividad de reflexión sobre la segunda ley de Mendel.

- ¿Qué proporción de guisantes amarillos puros hay después de la cruza?
- ¿Qué proporción de los guisantes son verdes puros?
- ¿Qué proporción de los guisantes son híbridos?, ¿de qué color serían estos híbridos?

Posterior a la serie de experimentos, y con ayuda de estadística descriptiva, Mendel pudo ser capaz de proponer un comportamiento de los miembros de la segunda generación: la proporción era de 3/4 de color amarillo y 1/4 de color verde.

Guisantes Híbridos	A	v
A		
v		

A continuación, con tus propias palabras describe una ley del comportamiento de la nueva generación a partir de la cruza de individuos de raza híbrida, según lo que acabas de observar y experimentar.

Conclusiones

El presente estudio tuvo como intensión poner en la mesa de discusión la necesidad de implementar, dentro de las instituciones formadoras de docentes, metodologías donde los futuros docentes tengan oportunidad de experimentar, desde el punto de vista del alumno, el trabajo con una situación basada en modelación matemática. Este trabajo de reflexión sobre la práctica busca sumarse a las propuestas para la proposición del proceso de aprendizaje de la modelación por parte de los futuros docentes. Se espera que este tipo de actividades acerquen al docente con las bondades, características y dificultades propias del uso de la modelación matemática y con ello se apoye una mayor implementación de esta estrategia en su trabajo con sus futuros alumnos.

El trabajo con situaciones de modelación matemática en el aula de formación de docentes demanda del investigador o formador la previa preparación de dichas situaciones. Estas deben estar ligadas a cada una de las etapas del proceso de modelación, donde se consideren elementos teóricos importantes. Uno de ellos es la apropiada selección de un contexto donde los docentes encuentren un interés. Específicamente, los fenómenos que permiten ligar a las matemáticas con otra u otras asignaturas permiten no solo redefinir el planteamiento de lecciones de matemáticas, sino a la vez abordar el currículo de manera transversal, tal y como lo promueve la SEP (2011).

En segundo lugar, es necesario tomar en cuenta la proposición de actividades donde el docente pueda vivir, desde el punto de vista del alumno, las tareas que a este se le demandarán en el salón de clases. Desde la discusión de la situación, la generación de dudas y la promoción de diálogo entre los mismos docentes se aportará una idea más clara al docente respecto al proceso de modelación.

En tercer lugar se recomienda atender la organización del trabajo que de antemano ha mostrado buenas consecuencias en las sesiones de modelación que se han investigado. Específicamente recomendamos el uso de la metodología Acodesa, donde se permita al docente trasladarse desde un trabajo individual hacia un trabajo en equipo para posteriormente exista una discusión en gran grupo. Al finalizar, el regreso al trabajo individual permitirá conocer el aprendizaje de los docentes después de esta experiencia.

Además, en las secuencias se sugiere promover la incorporación de una tecnología que permita al docente conocer en qué momentos es favorable el uso de algún recurso de acuerdo con lo señalado por investigaciones. En la propuesta realizada se retoman elementos encontrados por Rodríguez y Quiroz (2015), donde se especifican tres momentos en que la tecnología permite el paso entre las diversas etapas de la modelación matemática. Por último, en las implementaciones se busca generar un ambiente donde el docente pueda experimentar no solamente las bondades del proceso, sino también las posibles dificultades a las que se puede enfrentar cuando sea él mismo el que aplique esta estrategia en su aula.

Los resultados presentados de la fase 1, así como el futuro trabajo en la fase 2, buscan aproximarse a realizar una investigación-acción donde se promueva la vinculación entre la práctica diaria del docente con el trabajo del investigador, permitiendo al primero una mejora de su desempeño y al segundo un mayor entendimiento del quehacer diario del docente en el aula de clases de matemáticas.

Agradecimientos

Este manuscrito presenta algunos resultados en el marco del proyecto Prodep "Laboratorio de innovación y didáctica de las matemáticas con tecnología", folio UA-COAH-PTC-405, carta de liberación DSA/103.5/16/10616.

Referencias

Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols... more objects, more context, more actions. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and*

Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study, *10*(21), 35-44. http://doi.org/10.1007/97803872982212
Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.
Castañeda, E. (2010). *La modelación como estrategia didáctica para la resolución de problemas en educación secundaria haciendo uso de un recurso educativo abierto* (tesis maestría no publicada). Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Nuevo León, México.
Creswell, J. (2007). *Qualitative Inquiry & Research Design: Choosing Among Five Approaches*. California, Estados Unidos: Sage.
da Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. da Ponte y J.F. Mateos (eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Lisboa, Portugal: Universidad de Lisboa.
da Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98), Barcelona, España: Graó.
Darden, L. (1991). *Theory Change in Science. Strategies from Mendelian Genetics*. Nueva York, Estados Unidos: Oxford University Press.
Doerr, H.M. (2007). What Knowledge do Teachers Need for Teaching Mathematics through Applications and Modelling? En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(24), 69-78. http://doi.org/10.1007/97803872982214
Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J.M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática*, *16*(1), 89-111. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516104
Ferreira, A. y Miorim, M. (2011). Collaborative Work and the Professional Development of Mathematics Teachers: Analysis of a Brazilian Experience. En N. Bednarz, D. Fiorentini y R. Huang (eds.), *International Approaches to Professional Development for Mathematics Teachers* (pp. 137-149). Ottawa, Canadá: University of Ottawa Press. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/j.ctt1ch77v3.13
Flores, E. (2006). El investigador educativo como agente de cambio. *1er Simposio Nacional de Investigación sobre la Innovación Educativa*. Monterrey, México: Investigación Acción / Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.
García, R. (2005). Innovación, cultura y poder en las instituciones educativas. Algunas evidencias encontradas en el "mundo de la vida" de las organizaciones escolares. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *3*(1), 578-585. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/551/55130157.pdf
Gliboff, S. (2015). The Mendelian and Non-Mendelian origins of Genetics. *Filosofia e História da Biologia*, *10*(1), 99-123.
Henn, H.W. (2007). Modelling pedagogy-overview. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(35), 321-324. http://doi.org/10.1007/978038729822133
Hitt, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *18*(1), 9-27. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/volume_18/adsc18-2013_001.pdf
Lakoma, E. (2007). Learning mathematical modelling-from the perspective of probability and statistics education. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(36), 387-394. http://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_42
Latapí, P. (2003). *¿Cómo aprenden los maestros?* (serie Cuadernos de discusión n. 6). México: Secretaria de Educación Pública. Recuperado de www.oei.es/historico/docentes/articulos/como_aprenden_maestros_latapi.pdf
Lesh, R. y Yoon, C. (2007). What is the distinctive in (our views about) models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching? En W. Blum, P.

Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(31), 161-170. http://doi.org/10.1007/978038729822115
Llinares, S. (2012). Del análisis de la práctica al diseño de tareas matemáticas para la formación de maestros. En N. Planas (coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 99-115). Barcelona, España: Graó.
Lorenzano, P. (2005). Ejemplares, modelos y principios de la genética clásica. *Scientiæ Studia*, *3*(2), 185-203.
Medina, D. (2011). *La modelación matemática como medio para la enseñanza de la relación funcional en el aula* (tesis de maestría no publicada). Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Nuevo León, México.
Muller, E. y Burkhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics-overview. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(34), 267-274. http://doi.org/10.1007/978038729822128
Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(1), 3-32. http://doi.org/10.1007/9780387298221
Nyaumwe, L. (2004). The impact of full time student teaching on preservice teachers' conceptions of mathematics teaching and learning. *Mathematics Teacher Education and Development*, *6*(1), 19-30.
Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2010). *PISA 2009 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science*. *Assessment*. París, Francia: OCDE Publishing.
Pead, D., Ralph, B. y Muller, E. (2007). Uses of technologies in learning mathematics through modelling. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(34), 309-318. http://doi.org/10.1007/978038729822132
Pollak, H. (1969). How can we teach applications of Mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, *2*(2), 393-404. http://doi.org/10.1007/BF00303471
Pollak, H. (2007). Mathematical modelling. A conversation with Henry Pollak. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(28), 109-120. http://doi.org/10.1007/97803872982219
Quiroz, S., Hitt, F. y Rodríguez, R. (2015). Évolution des conceptions du processus de modélisation mathématique de futurs enseignants du primaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 20*(1), 149-179. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/
Rodríguez, M. y Soto, J. (2011). Actividades didácticas dirigidas a profesores de matemáticas de secundaria, diseñadas con la metodología Acodesa. En F. Hitt y C. Cortés (eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 126-132). Quebec, Canadá: Loze-Dion Éditeur.
Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2015). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 99-124. http://doi.org/10.12802/relime.13.1914
Ruiz-Higueras, L. y García, F. (2011). Análisis de las praxeologías didácticas: implicaciones en la formación de maestros. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD, CRM Documents 10* (pp. 431-464). Bellaterra, Barcelona, España: Centre de Recerca Matemática.
Santos, L.M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial iberoamerica.
Secretaría de Educación Pública. (2011). *Plan de estudios 2011. Eduación básica*. México: Secretaría de Educación Pública.
Trigueros, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo: un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *11*(31), 1207-1240. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/140/14003106.pdf
Valega, O. (s.f.). *Las leyes de Mendel*. Recuperado de http://cvonline.uaeh.edu.mx/Cursos/Bach_Virt/CE101/Materiales_Unidad_4/Act.4.3_Leyes_de_Mendel.pdf

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, *3*(5), 73-94. Recuperado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/3014/2869

Wilson, S. y Cooney, T. (2002). Mathematics teacher change and developments. En G.C. Leder, Pehkonen, Erkki, Törner y Günter (eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 127-147). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers. http://doi.org/10.1007/03064795838

Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria

Proposal of a didactic situation with the use of teaching material for the understanding of the notion of similarity in secondary school students

BRICEÑO SOLÍS Eduardo Carlos
ALAMILLO SÁNCHEZ Lizbet

RECIBIDO: AGOSTO 21 DE 2017 | ACEPTADO PARA PUBLICACIÓN: SEPTIEMBRE 27 DE 2017

Resumen

Se reporta el resultado de la aplicación de una situación didáctica con estudiantes de secundaria para analizar cómo comprenden la noción de semejanza con el uso de material didáctico. La situación se fundamentó en la teoría de situaciones didácticas con actividades de construcción de figuras geométricas con el uso del tangram como material de uso didáctico. El objetivo es que los estudiantes generen una representación geométrica de semejanza y conjeturen la idea de razón. Los resultados muestran estrategias con el uso del material para generar explicaciones sobre la noción de semejanza.

Palabras clave: SITUACIÓN DIDÁCTICA, MATERIAL DIDÁCTICO, SEMEJANZA.

Eduardo Carlos Briceño Solís. Docente-investigador de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México. Obtuvo el grado de doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Ha impartido cursos, ponencias, talleres y conferencias en congresos nacionales e internacionales con la temática de construcción social del conocimiento matemático y el uso de recursos didácticos en los procesos de enseñanza de las matemáticas. Actualmente es miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Correo electrónico: ecbs74@gmail.com.

Lizbet Alamillo Sánchez. Estudiante de Licenciatura en Matemáticas con orientación en Matemática Educativa y Estadística de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México. Ha participado en eventos de divulgación de las matemáticas en el estado de Zacatecas, escuelas de verano, taller de matemáticas para niños en la Unidad Académica de Matemáticas. Coautora del cartel *Optimización de flujos en semáforos*, presentado en el Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana 2016. Correo electrónico: lizalsan88@hotmail.com.

Abstract
See the result of the application of a didactic situation with secondary students to analyze how to understand the notion of similarity with the use of didactic material. The situation is based on the Theory of Didactic Situations with activities of construction of geometric figures with the use of tangram as material of didactic. The goal is that students generate a geometric representation of similarity and conjecture the idea of reason. The results of the strategies with the use of the material to generate explanations on the notion of similarity .

Key words: DIDACTIC SITUATIONS, TEACHING MATERIAL, SIMILARITY.

1. Introducción

Se consideró como problemática la complejidad de la comprensión del concepto de semejanza de figuras geométricas en estudiantes de nivel básico (segundo grado de secundaria). Por otra parte, se asumen que el uso de material tangible ayuda a la comprensión de la noción de semejanza. Con estas afirmaciones se formuló la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo comprenden los estudiantes de nivel básico la noción de semejanza al implementar una situación didáctica con el uso de material tangible?

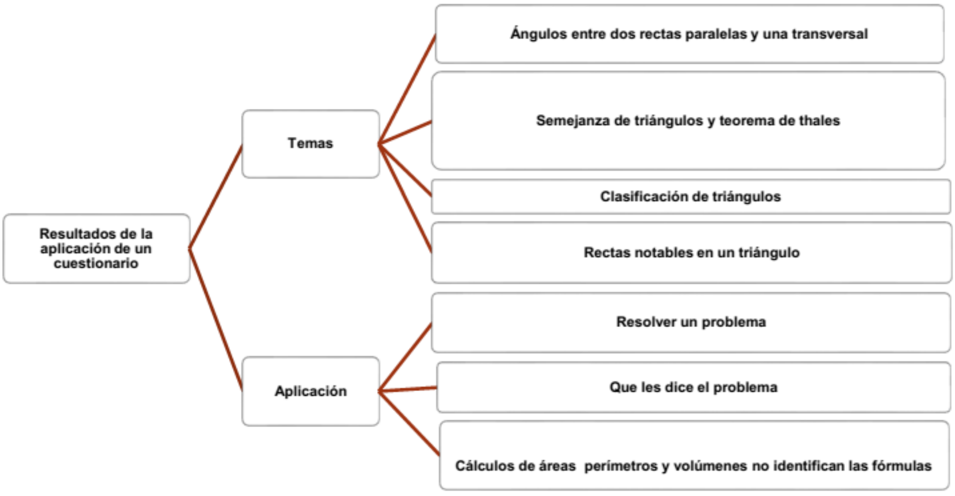
La justificación se da porque el estudiante manipula poco, de forma física, la noción del concepto, pues lo aprende de forma algorítmica (Gualdrón y Gutiérrez, 2006; Gamboa y Ballestero, 2010; Fontes, 2011). Al respecto, Barrantes, Balletbo y Fernández (2014, p. 4) mencionan que "la enseñanza de la geometría es difícil por el nivel de abstracción visual, mental y espacial, pues la enseñanza es presentada de forma tradicional, es decir, enfocándose en el aspecto memorístico". Así, la enseñanza requiere desarrollar en el estudiante diversas estrategias y que de ellas reflexione para resolver un problema. Razón por la cual se diseñó una serie de actividades bajo el marco teórico de la teoría de situaciones didácticas, ya que permite analizar cómo el estudiante valida y reformula estrategias para la solución de un problema.

2. Dificultades en el aprendizaje de la semejanza

Uno de los temas en geometría que se dificulta entender al estudiante es el de semejanza, como se muestra en la figura 1, que es el resultado de la aplicación de un cuestionario diagnóstico a estudiantes de secundaria.

Los autores de esta investigación mencionan que se debe al uso excesivo de la memorización y aplicación de fórmulas que carecen, conceptualmente, de significado para el estudiante.

Fig. 1. Resultados de temas que se dificultan a los estudiantes de secundaria.



Fuente: Gamboa y Ballestero, 2010.

Por otra parte, Gualdrón y Gutiérrez (2006, p. 4) expresan como problemática "que los estudiantes tienen dificultad para reconocer la semejanza cuando las medidas de los lados de las figuras no son enteras, y que recurren a la estrategia aditiva de forma errónea". Es por ello que su objetivo de investigación fue conocer y estudiar las ideas previas acerca del conocimiento y razonamiento que tienen los estudiantes para contrastarlas con las ideas generadas después de impartir una unidad de enseñanza del concepto de semejanza. El diseño de los autores consistió en un pretest que da a conocer conocimientos previos del estudiante a la enseñanza de la semejanza, así como su nivel de razonamiento en actividades de manipulación de figuras no regulares justificándolo de manera numérica, gráfica o verbal. El siguiente texto muestra la intencionalidad del pretest:

> Sus conocimientos en cuanto a contenidos relacionados con el tema, sus estrategias de resolución (ejercicios y problemas), las dificultades más frecuentes sobre diferentes aspectos de la semejanza de figuras planas y los tipos de errores más frecuentes. [Gualdrón y Gutiérrez, 2006, p. 9].

Estos investigadores afirman que la comprensión de la semejanza se verá reflejada en la concepción que tengan al respecto y que el aspecto visual de la razón, en la representación geométrica, es de gran ayuda. Como resultados describe que los estudiantes logran ver que la estrategia aditiva es incorrecta, pues en el pretest se evidencia que la mayor parte de las respuestas son incorrectas al utilizarla. Conviene ejemplificar el término estrategia aditiva en el siguiente ejemplo. Se plantea el ejercicio a los estudiantes de ampliar un rectángulo a una base de 12 como se muestra en la figura 2.

Se reporta que los estudiantes dan como respuesta que la altura es de 10 cm, ya que realizan la diferencia de 12–5=7, y este valor se le suma a la altura 3, para

Fig. 2. Ejemplo de estrategia aditiva.

Fuente: Gualdrón y Gutiérrez (2006, p. 4).

obtener así 7+3=10. Por otro lado, realizan la operación 5–3=2 y este valor se lo restan a 12 para obtener 12–2=10. Al respecto, esta dificultad también es reportada por Mochón (2012), quien describe que se hace uso de diferencias o sumas en parte o todo en lugar de un razonamiento multiplicativo.

En otro trabajo sobre el concepto de semejanza se reporta una propuesta de enseñanza usando fractales y la aplicación de un pretest y postest, con la idea de realizar una clasificación de las dificultades de su comprensión (Castro y Céspedes, 2009). Se encontró el procedimiento del uso de la estrategia aditiva en figuras semejantes y también si la relación de proporción de las figuras es fraccionaria; los estudiantes no lo reconocen como figuras semejantes.

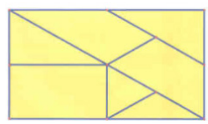
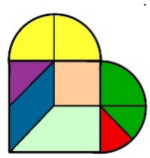
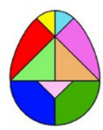
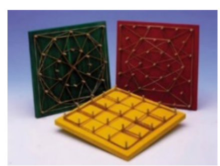
Fontes (2011) reporta investigaciones acerca de la semejanza de figuras planas enfocándose en analizar los objetivos, las metodologías utilizadas, las condiciones que realizan para analizar los datos y resultados. A continuación describimos algunos de ellos:

- La investigación de Cedro y Jacinto (2007), con el objetivo de conocer los procesos de aprendizaje respecto a la semejanza, elaboraron un experimento en el cual incluyeron actividades referentes a la identificación de figuras semejantes a través del dibujo y recorte de triángulos. Concluyen que las actividades tuvieron un impacto positivo en la enseñanza del tema (citado en Fontes, 2011).
- Asimismo, Silva (2007), planteó una serie de actividades sobre cómo los alumnos construyen el concepto. Para ello presenta ocho actividades, donde la primera tiene la idea sobre qué entienden los alumnos por objetos semejantes; la segunda fue de medición de mapas a distinta escala; la tercera, cuarta, quinta, sexta y séptima constaba de encontrar escalas en planos de casas y de una piscina; la última se incluyó un problema de aplicación. Los resultados mencionados fueron satisfactorios y permitieron al estudiante construir el concepto (citado en Fontes, 2011).
- Por último, Gualdrón (2010) aplica tareas que planteó en otra investigación en una unidad de enseñanza de la semejanza. Los resultados confirman que existe una dificultad estrecha entre la habilidad del alumno para construir figuras semejantes y darle una representación visual de la misma (citado en Fontes, 2011).

Consideramos que las referencias anteriores coinciden que el concepto de semejanza es tomado en cuenta de diferentes maneras, pero también es un tema que representa cierta dificultad de comprensión por los estudiantes. Sin embargo, consideran importante el aspecto visual en este tema, ya que propicia una serie de habilidades en el estudiante que propicia su comprensión. En ese sentido nos pareció importante indagar sobre el uso de algún recurso que permita la observación visual, misma que describimos a continuación.

Villarroel y Sgreccia (2011) consideran que los materiales didácticos utilizados para la enseñanza y aprendizaje de la geometría, desde un aspecto visual del tema, propicia una serie de habilidades en el estudiante. Estos autores distinguen siete grupos que se describen en la tabla 1.

Tabla 1. Grupos de materiales didácticos y habilidades a desarrollar.

Material didáctico	Habilidades que desarrolla	Imagen
Modelos fijos 2D y 3D	• Visuales. • Comunicación. • Razonamiento. • Aplicación.	
Rompecabezas geométrico	• Visuales. • Dibujo o construcción. • Comunicación. • Razonamiento. • Aplicación.	 
Tangram	• Dibujo y construcción. • Ingenio. • Comunicación. • Razonamiento. • Aplicación.	 
Geoplano	• Visuales. • Dibujo y construcción. • Razonamiento. • Aplicación.	
Transformaciones dinámicas	• Visuales. • Comunicación. • Construcción. • Razonamiento.	
Origami o papiroflexia	• Comunicación. • Dibujo y construcción. • Razonamiento. • Aplicación.	 
Objetos del entorno real	• Visuales. • Comunicación. • Dibujo y construcción. • Razonamiento. • Aplicación.	

Fuente: Villarroel y Sgreccia, 2011.

Así, se considera que la problemática de la comprensión del tema de semejanza de figuras se debe al uso de la estrategia aditiva como recurso nato del estudiante. También se encontró la sugerencia de emplear recursos didácticos que sean visuales, tangibles y que apoyen la comprensión del concepto. En ese sentido, se ha considerado el uso del tangram, ya que permite múltiples manejos para crear figuras semejantes de diferente tamaño y habilidades de comunicación, razonamientos y aplicación que favorecen el desarrollo de la estrategia multiplicativa.

Para ello se planteó el diseño de una situación didáctica en torno al uso del tangram de siete piezas como recurso didáctico para su intervención en el tema. Hemos convenido llamar noción de semejanza, ya que el objetivo de este diseño es que el estudiante de segundo grado de secundaria desarrolle la idea del concepto de semejanza mediante un razonamiento multiplicativo. El contenido de semejanza de encuentra ubicado en el bloque I y III del plan de estudios de tercer grado (SEP, 2011), donde considera la aplicación del concepto y la construcción de figuras geométricas como se muestra en la tabla 2.

Se espera que el diseño de situación didáctica propicie en el estudiante el establecimiento de una razón de proporción multiplicativa por medio de la experimentación con el tangram para no recurrir a la estrategia aditiva. La elección del marco de la teoría de situaciones didácticas es considerada, ya que estructura la forma en que los estudiantes construyen conocimiento matemático cuando interactúan en un medio didáctico que orienta a estrategias para comprender el concepto matemático en cuestión. Nuestro trabajo pretende que la situación didáctica, con el uso de tangram, permita no recurrir a la estrategia aditiva, sino a la identificación de un patrón de proporcionalidad para establecer la razón de semejanza mediante relaciones multiplicativas.

3. La teoría de situaciones didácticas

La teoría de situaciones didácticas propuesta por Brousseau (1997) fue diseñada para establecer una relación entre estudiante-profesor y medio didáctico, en el cual "desa-

Tabla 2. Ubicación del concepto de semejanza en tercer grado de secundaria

Bloques o unidades	Forma, espacio y medida
Bloque I	• Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades. • Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.
Bloque III	• Aplicación de criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas. • Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales. • Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Fuente: SEP, 2011.

rrolla la construcción de un conocimiento nuevo cuando el profesor provee el medio didáctico y el estudiante se enfrenta a él para la construcción del saber" (citado en Chavarría, 2006). La teoría es importante para los fines de esta investigación, ya que permite conocer cómo el estudiante construye y comprende la noción de semejanza mediante una validación de estrategias con el uso de un recurso didáctico tangible, con la intención de tener un enfoque distinto de enseñanza donde el elemento principal bajo esta teoría es la interacción del alumno con su medio didáctico para el desarrollo de estrategias.

El medio didáctico comienza desde el momento en que el profesor diseña la actividad, teniendo en cuenta las necesidades y condiciones que se requieren para el desarrollo del tema. Durante el proceso de una situación didáctica se puede analizar cómo el estudiante aborda el tema, cómo piensa y enfrenta decisiones acerca de la resolución de problemas relacionados. En el escrito de Brousseau (1986), que lo describe como un medio sin intenciones didácticas, es claramente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera. Al ser el medio didáctico el espacio donde se desenvuelve el estudiante para la construcción del nuevo conocimiento, este requiere metodológicamente un proceso de etapas el cual se dividen como tipológicos de situaciones.

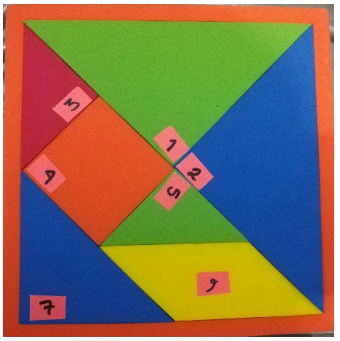
3.1. Tipología de situaciones en la teoría de situaciones didácticas

A continuación se presenta una tipología de situaciones incluidos en la teoría de Brousseau (1986) en una situación didáctica que conforman el medio didáctico que son: la acción, formulación, validación:

1. La situación acción consiste básicamente en que el estudiante trabaje individualmente con un problema, aplique sus conocimientos previos y desarrolle un determinado saber mediante la implementación de estrategias.
2. La situación de formulación consiste en un trabajo en grupo, donde se requiere la comunicación de los estudiantes; esto es, compartir experiencias en la construcción del conocimiento.
3. La situación de validación, donde, una vez que los estudiantes han interactuado de forma individual o de forma grupal en el medio didáctico, se pone a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esa interacción.
4. La institucionalización del saber representa una actividad de suma importancia en el cierre de una situación didáctica. En esta los estudiantes ya han construido su conocimiento y simplemente el docente retoma y formaliza, aporta observaciones y clarifica conceptos ante los cuales la situación tuvo problemas.

Así, la teoría de situaciones didácticas, como herramienta teórica, nos permitirá conocer cómo el estudiante construye la noción de semejanza, su razonamiento al respecto desde una representación geométrica con la interacción física del tangram. En específico se trata de que se reconozcan patrones de aumento de los lados de figuras geométricas mediante una estrategia multiplicativa. A continuación se pre-

Fig. 3. Tangram de siete piezas que se utilizó en la investigación.



sentan las tipologías de la situación didáctica para analizar este desarrollo de la construcción del saber; lo describimos conforme las actividades que se diseñaron para esta investigación.

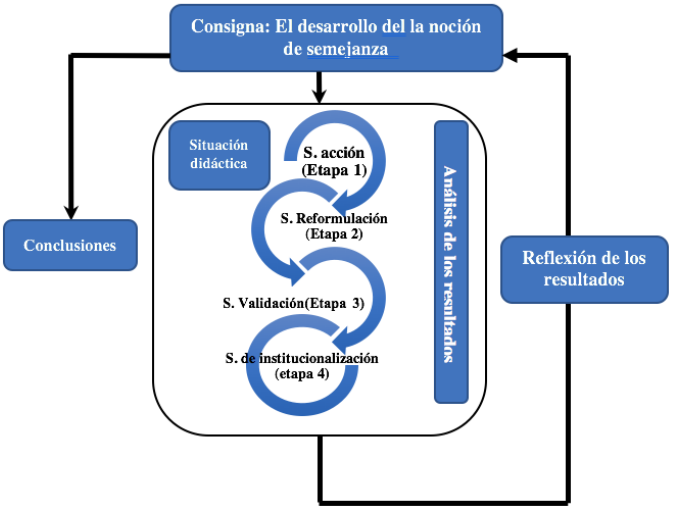
4. Tipología de situaciones de la situación didáctica de la investigación

El diseño de situación didáctica empleó el tangram como recurso de material didáctico tangible (cuyas piezas están numeradas en la figura 3).

Dicho recurso forma parte del medio didáctico para establecer la interacción de alumno-maestro-medio, además de proporcionar a los estudiantes la oportunidad de una experimentación física del concepto con el propósito de hacer emerger sus razonamientos y estrategias.

La situación se aplicó a un grupo selecto de 16 alumnos de segundo año de una secundaria perteneciente a la Universidad Autónoma de Zacatecas, los cuales se dividieron en cuatro equipos de tres integrantes y uno de cuatro integrantes. La razón de integrar equipos de tres estudiantes es para que, en sus interacciones, hubiera un criterio de desempate de conjeturas. El equipo de cuatro se conformó dado la paridad total del grupo. A cada mesa de trabajo se le otorgó un tangram, regla graduada y transportador. La actividad fue planeada para una sesión de una hora y cuarenta y cinco minutos. Para la recolección de datos y evidencia se entregó a los equipos una hoja de respuestas por etapa. Se grabó a un equipo al azar, siendo elegido el E_1, video conformado por siete fragmentos de distinta duración como apoyo de algunas de las respuestas otorgadas por estudiantes en las hojas de trabajo. El estudio metodológicamente se encuentra conformado por cuatro etapas que atienden el proceso de construcción de conocimiento en la situación didáctica: acción, formulación, validación e institucionalización, que denominamos como etapas 1, 2, 3 y 4, respectivamente. En cada una de ellas se analizan los datos escritos en las hojas de trabajo y videograbaciones para, posteriormente, reflexionar ante la consigna de cómo el estudiante desarrolla este concepto con el uso del material. Por lo tanto, se intenta observar el uso de estrategias (multiplicativas, aditivas u otras) que le permitan identificar un patrón de comportamiento de aumento de la magnitud de los

Fig. 4. Esquema metodológico que se utilizó en la investigación.



Fuente: Elaboración personal.

lados de figuras geométricas. Se presenta el diagrama metodológico del proceso de la obtención de resultados en la figura 4.

En el siguiente apartado se presentan las intencionalidades de la situación didáctica en cada una de las etapas, siendo este el instrumento para la obtención de resultados.

4.1. Situación didáctica de la noción de semejanza

4.1.1. Situación de acción (etapa 1)

Actividad:

1. Con el apoyo de regla y transportador realicen las medidas de los lados y ángulos de cada figura del tangram; registrarán los datos en un cuadro como el de la siguiente imagen.

Medidas de los lados en cm					Medidas de sus ángulos grados			
Nombre y Número de pieza	a	b	c	d	∡ a	∡ b	∡ c	∡ d
Triángulo 1								
Triángulo 2								
Triángulo 3								
Cuadrado 4								
Triángulo 5								
Paralelogramo 6								
Triángulo 7								

Propósito:

- Los estudiantes interactúen con el concepto de forma física, teniendo un primer acercamiento con los elementos de una figura geométrica, como son los ángulos y las medidas de los lados. El investigador intervendrá solo de ser necesario sobre dudas en algún planteamiento de la actividad. Como parte de la situación de acción es el trabajo individual, familiarizándose con las figuras geométricas estableciendo las características que las definen.

4.1.2. Situación de formulación (etapa 2)

Actividades:

1. Construye dos triángulos de dimensiones 24, 17 y 17 cm (ver figura 5), uno formado por dos piezas y otro de cuatro piezas (ver figura 6). Toma nota de cuáles fueron las piezas que utilizaste en la construcción de los triángulos y escribe la medida de sus ángulos.
   - Cantidad de piezas del primer triángulo formado por 2 piezas: ________________________.
   - Medidas de los ángulos del triángulo formado por 2 piezas: ________________________.
   - Cantidad de piezas del primer triángulo formado por 4 piezas: ________________________.
   - Medidas de los ángulos del triángulo formado por 4 piezas: ________________________.

2. Construye un triángulo con tres piezas (ver figura 7) y otro con siete piezas del tangram (ver figura 8). Anota las piezas con las que construiste los triángulos, además de las dimensiones y medidas de los ángulos de cada triángulo formado.
   - Cantidad de piezas del primer triángulo formado por 3 piezas: ________________________.
   - Medidas de los ángulos del triángulo formado por 3 piezas: ________________________.
   - Dimensiones de los lados del triángulo formado por 3 piezas: ________________________.
   - Cantidad de piezas del primer triángulo formado por 7 piezas: ________________________.
   - Medidas de los ángulos del triángulo formado por 7 piezas: ________________________.
   - Dimensiones de los lados del triángulo formado por 7 piezas: ________________________.

2.1. ¿Qué puedes decir de sus ángulos y dimensiones comparando el de tres piezas con el triángulo formado con dos piezas?
Justificación: ____

2.2. ¿Qué puedes decir de sus ángulos y dimensiones comparando el de tres piezas con el triángulo formado con el de siete piezas?
Justificación: ____

Propósito:

- Se derivan dos preguntas de la actividad anterior, las cuales tienen el objetivo de que al comparar estratégicamente los triángulos construidos en la actividad 1, observen que las medidas son distintas, pero su forma se mantiene.

3. ¿Podría decir que el triángulo formado con dos piezas y el de cuatro piezas son del mismo tamaño y de la misma forma?
   Justificación: ______________________________________

Propósito:

- La actividad tiene la finalidad de que los estudiantes vean que la semejanza ocurre también cuando las figuras mantienen su forma y tienen las mismas medidas.

4. Construye una figura de la misma forma, pero distinto tamaño a la pieza número 4, de tal forma que su tamaño sea el doble. ¿Qué puedes decir de sus ángulos?
   Justificación: ______________________________________

Propósitos:

- La finalidad es que construyan una figura del doble de tamaño que el cuadrado del tangram, conservando la medida de sus ángulos.
- Los estudiantes trabajarán en sus equipos en la construcción de figuras requeridas y mediante comunicación grupal para realizar conjeturas y afirmaciones acerca de la idea implícita de la noción de semejanza.

La primera actividad consta de dos preguntas, con la idea de desarrollar estrategias de construcción de triángulos con distintas cantidades determinadas de piezas del tangram. Los triángulos que se les pide construir son los que se ven en las figuras 5, 6, 7 y 8, aunque de acuerdo con su estrategia de construcción las piezas serán distintas.

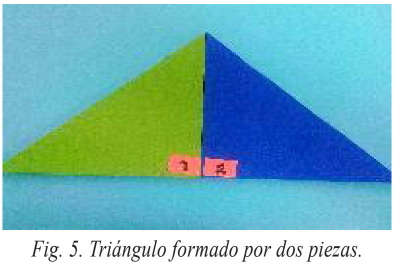


Fig. 5. Triángulo formado por dos piezas.

Fig. 6. Triángulo formado por tres piezas.

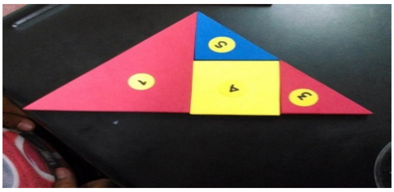


Fig. 7. Triángulo formado por cuatro piezas.

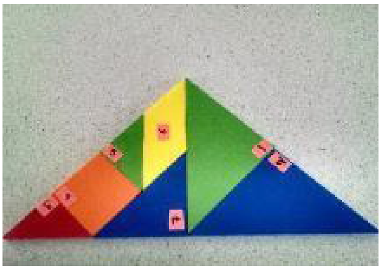


Fig. 8. Triángulo formado por siete piezas.

4.1.3. Situación de validación (etapa 3)

Actividad:

5. ¿Podrías encontrar una figura de igual forma y distinto tamaño al paralelogramo número 6?
   Justificación: ____

Propósito:

- En esta etapa, la pregunta propuesta impide utilizar las estrategias de construcción utilizadas en la etapa de formulación, y que requerirá su reestructuración de forma de pensar para buscar otra estrategia.

4.1.4. Situación de institucionalización (etapa 4)

Actividad:

6. Registra en la tabla de registro las medidas de los lados de la figura geométrica número 6 (a este le llamaremos paralelogramo 1) y las del paralelogramo que se formó anteriormente de mayor dimensión en la pregunta 5 (a este le llamaremos paralelogramo 2). Compara sus medidas y responde: ¿cuáles serían las medidas de los lados del paralelogramo siguiente, que denominaremos con el numero 3?

Tabla de registro de medidas.

Medidas de los lados en cm				
Nº Paralelogramo	a	b	c	d
#1				
#2				
#3				

6.1. Observa las diferencias entre las medidas de los paralelogramos anteriores y responde: ¿cuáles serían las medidas de los lados de un paralelogramo 5? Escribe la estrategia que utilizaste para responder la pregunta anterior.

Propósitos:
- La idea principal será que observen un patrón entre cada paralelogramo. Al comparar las medidas del original con el paralelogramo 2, observen que uno es el doble de tamaño que el anterior, por lo cual se les pedirá deduzcan las medidas del paralelogramo 3 y 5, teniendo presente la observación anterior.
- La finalidad es que los estudiantes observen que la diferencia entre cada paralelogramo será el doble, como idea a la construcción de la razón de semejanza.

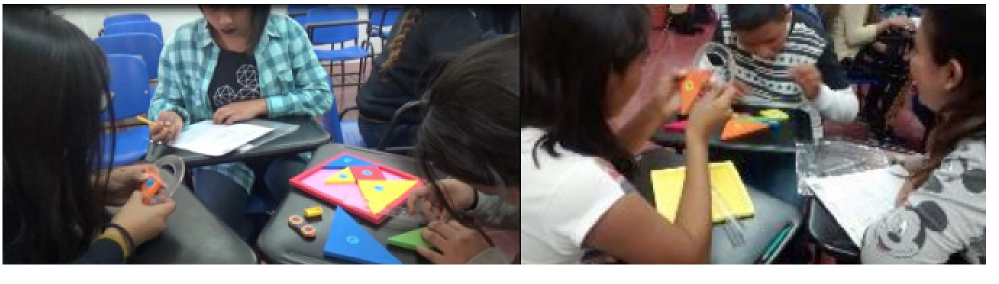
5. Descripción de resultados

Los datos utilizados en esta investigación se obtuvieron por medio de fotografías y grabación de videos, así como imágenes de las respuestas escritas por los estudiantes en cada etapa analizada. Por lo extenso del documento se muestra el análisis que consideramos representativo de cada etapa de la situación didáctica.

5.1. Primera etapa: situación de acción

El objetivo fue que los estudiantes interactuaran en un primer acercamiento con los elementos principales para la noción de semejanza; es decir, ángulos y las medidas de los lados de figuras geométricas. Se muestran imágenes de la interacción de los equipos E_1 y E_3 cuando realizaron mediciones a los lados (19 cm) y ángulos de las figuras que integran el tangram de siete piezas de forma tangible.

Fig. 9. Interacción de los equipos E_1 y E_3 con los elementos de semejanza.



Se les pidió registrar dichas medidas en la tabla adjunta en su hoja de trabajo donde mostramos la respuesta del equipo E_3, que coincide con E_1, E_2 y E_4, de donde podemos considerar el primer acercamiento con los elementos del concepto (figura 10).

Fig. 10. Respuesta del equipo E_3 en la etapa de acción.

Medidas de los lados en cm					Medidas de sus ángulos grados			
Nombre y Número de pieza	a	b	c	d	∡ a	∡ b	∡ c	∡ d
Triángulo 1	12	17	12		45°	45°	90°	
Triángulo 2	12	17	12		45	45°	90°	
Triángulo 3	6	8.5	6		45°	45°	90°	
Cuadrado 4	6	6	6	6	90°	90°	90°	90°
Triángulo 5	6	8.5	6		45°	45°	90°	
Paralelogramo 6	6	8.5	6	8.5	45°	135°	45°	135°
Triángulo 7	8.5°	12°	8.5°		45°	90°	45°	

Así, la situación de acción con el uso del tangram facilitó a los alumnos experimentar con el concepto de forma implícita, y que es conocimiento previo a ser utilizado para el proceso de construcción de la siguiente etapa.

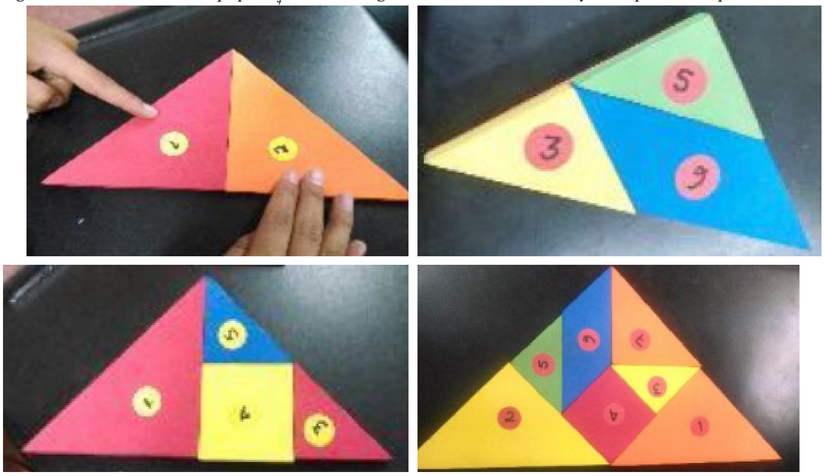
5.2. Segunda etapa: situación de formulación

El objetivo es que los estudiantes construyan figuras conservando la forma, pero de distinto o igual tamaño de sus lados, que formalmente es la idea de semejanza. Esta etapa se conforma de cuatro preguntas, que consisten en la construcción de figuras con cierta medida dada o con una cantidad determinada de piezas del tangram. En una de las preguntas se pedía comparar las figuras y que expresaran qué podían observar acerca de sus ángulos y dimensiones.

Los equipos E_1, E_2, E_3 y E_4 construyeron triángulos con distintos números de piezas conformados por; dos, tres, cuatro y siete piezas (figura 11) y se les pidió registrar las medidas de los lados y ángulos.

Para la construcción de los triángulos requeridos, los equipos E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5 generaron distintas estrategias de construcción entre ellas. Por ejemplo, el E_1, para construir el triángulo de cuatro piezas, se apoyaron de su hoja de trabajo para buscar qué figuras del tangram les funcionaban para la construcción del triángulo; evidencia de ello se presenta un fragmento de video donde la alumna A_1 observa su

Fig. 11. Construcción del equipo E_4 de los triángulos de dos, tres, cuatro y siete piezas, respectivamente.



hoja de trabajo buscando las piezas que reúnan las medidas requeridas e interactúa con sus compañeras A_2 y A_3.

La alumna A_1 se dirige a A_2.

A_2 [La alumna busca las piezas que le dice A_1, piezas 6, 5, 4 y 3]: —Con estas vamos a formarlo. A ver, hay que hacer el triángulo —A2 dibuja imaginariamente en su butaca el triángulo para tratar de visualizarlo.

A_1: —O deja buscar más formas.

A_2: —Aquí puede ir la punta —haciendo referencia a la pieza 3—. Mira, mira, después puede ir este —coloca la pieza 6 mostrándoles a A_1 y A_3—; luego puede ir este —ahora coloca las piezas 4 y 5, pero se da cuenta que embonan y las retira—; así iba bien, así estaba bien […] —la alumna logra formar el de tres y deciden seguir la estrategia de buscar lo que les falta en medida para completar el triángulo de cuatro piezas.

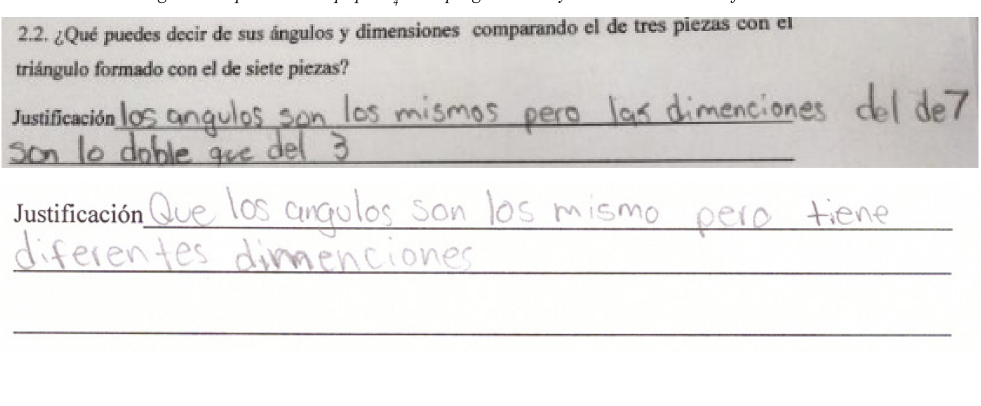
A_2 [se dirige a A_3]: —Préstame esa pieza […]

Las alumnas logran formar el triángulo de cuatro piezas siguiendo la estrategia de completar el de tres piezas con una pieza más. En una segunda parte de esta etapa se les pidió comparar el triángulo formado de tres piezas con el de siete, y el de dos piezas con el de cuatro. Resultado de esta comparación, respecto a sus dimensiones y ángulos, el equipo E_4 deduce que el triángulo formado por siete piezas es el doble de tamaño que el triángulo formado por tres piezas y que conservan su forma (figura 12). Dicha deducción también la obtuvieron los equipos E_1, E_2 y E_3, a excepción del equipo E_5.

Las deducciones de los equipos E_1, E_2, E_3 y E_4, en una primera instancia, se expresaron de forma verbal al comunicarse entre sus compañeros y llegar a una conclusión, ayudados por el material de los triángulos que construyeron con anterioridad. Dichas deducciones consistían al observar que los triángulos conservaban su forma, pero las medidas de sus lados eran distintas.

La estrategia consistió el comparar dos triángulos entre sí, apoyándose de la información obtenida de la pregunta 2, donde registraron las medidas de los trián-

Fig. 12. Respuesta del equipo E_4 a las preguntas 2.2 y 4 de la situación de formulación.



2.2. ¿Qué puedes decir de sus ángulos y dimensiones comparando el de tres piezas con el triángulo formado con el de siete piezas?

Justificación los angulos son los mismos pero las dimenciones del de7 son lo doble que del 3

Justificación Que los angulos son los mismo pero tiene diferentes dimmenciones gulos con dos, tres, cuatro y siete piezas del tangram. Esto les permitió reformular lo anteriormente obtenido de las demás etapas de la situación.

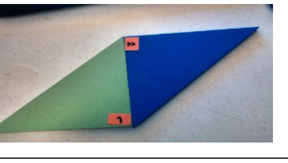
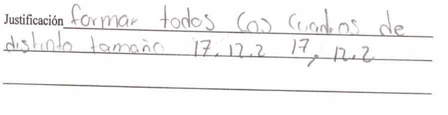
El equipo E_5 presentó la dificultad en esta etapa al no saber cómo obtener las medidas de los ángulos. Se les dificultó obtener algunas de las medidas, hecho que determinó no obtener las deducciones sobre la igualdad de ángulos y diferencia en medidas al comparar dos figuras. El triángulo de siete piezas solicitado en esta etapa para algunos equipos fue complicado, pues en el caso el E_5 no lo lograron construir.

Es así como al trabajar de forma grupal, experimentar con el concepto, comunicar las ideas entre sus compañeros, los equipos E_1, E_2, E_3 y E_4 obtuvieron la deducción de que las figuras son de distinto tamaño y que las medidas de sus ángulos son iguales. Podemos decir que los estudiantes se encuentran formulando ideas en forma individual y grupal de semejanza mediante una representación geométrica empleado prácticas de medición y comparación de las figuras.

5.3. Tercera etapa: situación de validación

Con la finalidad de afianzar las estrategias de solución de cada equipo y observaciones que lograron hacer en la etapa anterior, se les planteó una pregunta (número 5 de la tabla 3) que involucra encontrar una figura que fuese de igual forma, pero de mayor tamaño a las anteriores. Como resultado se presentaron tres tipos de estrategias para validar que fuese la figura deseada, pues en la etapa de formulación la estrategia utilizada en los equipos fue la de sobreponer figuras requiriendo la búsqueda de estrategias alternas. En la tabla 4 se describen las estrategias de los equipos E_1, E_2, E_3 y E_4 ante la consigna de encontrar el paralelogramo de mayor tamaño que el original del tangram (pieza número 6). Las estrategias de los equipos E_2, E_3 y E_4 fueron desarrolladas de forma experimental con el uso del tangram; por ejemplo, la del equipo E_1 está regida bajo la idea de aumentar medidas directamente.

Tabla 4. Estrategias de construcción de los equipos E_1, E_2, E_3 y E_4

Equipo	Estrategia para formar el paralelogramo de mayor tamaño	Paralelogramo formado
E_2 y E_4	Unieron las piezas 1 y 2 del tangram.	
E_1	Aumento directo de una medida que establecieron a cada lado del paralelogramo.	 Justificación formar todos los cuadros de distinto tamaño 17, 12.2 17, 12.2

E_3	Utilizaron la estrategia denominada división de figuras 1.	 Construcción del paralelogramo de mayor dimensión.

* Consiste en dividir la figura original, similar a las piezas de un rompecabezas, en un número determinado de figuras planas, para la búsqueda de figuras de mayor tamaño.

La experimentación con el tangram hizo posible que los estudiantes encontraran, en esta etapa, distintas estrategias para construir un paralelogramo semejante al original (pieza número 6). Cuatro de los equipos lograron el objetivo.

5.4. Cuarta etapa: situación de institucionalización

La idea principal de la situación de institucionalización, que es formalizar las ideas, las conclusiones y observaciones realizadas por los equipos durante el proceso de las situaciones didáctica anteriores. Por lo tanto, tiene el objetivo de que los alumnos expresen la idea de razón de semejanza.

Se pidió que observaran las medidas de los lados del paralelogramo original y las compararan con las del número 2 y posteriormente dedujeran las medidas de los paralelogramos 3 y 5. Esto con la finalidad de que logren observar que existe un patrón; es decir, que el paralelogramo 2 es de doble tamaño que el 1 y que el 3 es de doble tamaño que el 2, llevándolos a crear la idea de una representación geométrica de la razón de semejanza.

Para deducir las medidas de los lados del paralelogramo 3 y 5, los alumnos, aunque no logran la observación de que el 2 es el doble del 1, desarrollan una estrategia para encontrar las medidas del siguiente paralelogramo. Los equipos E_1, E_2, E_3 y E_4 sumaron al paralelogramo 3 la diferencia de medidas entre el 1 y el 2. Se puede concluir que los estudiantes no logran parcialmente el reconocimiento del patrón

Fig. 16. Respuesta del equipo E_4.

Tabla 2

Medidas de los lados en cm				
Nº Paralelogramo	a	b	c	d
#1	8.5	6	8.5	6
#2	17	12	17	12
#3	25.5	18	25.5	18

6.1. Observa las diferencias entre las medidas de los paralelogramos anteriores y responde

¿Cuáles serian las medidas de los lados de un paralelogramo # 5?

42.5,30,42.5,30

Escribe tu estrategia que utilizaste para responder la pregunta anterior.

Sumando los lados del #2 y #3

multiplicativo entre los paralelogramos, siendo la estrategia de adición la que surgió. Sin embargo, la situación anterior da evidencia de un patrón multiplicativo entre dos paralelogramos (uno es el doble que otro) y que solo al momento de formalizar recurren a la estrategia aditiva.

5.5. Reflexiones de los resultados

Se observó que al implementar el tangram como recurso didáctico para crear en los alumnos la noción de semejanza, tuvo un impacto positivo en las actividades, ya que les permitió manipular el concepto a través del material tangible y no solo de manera abstracta, si bien dicho concepto se aborda con formalidad en tercer año de secundaria. La decisión de aplicarlo a estudiantes de segundo año se tomó para proporcionar un primer acercamiento mediante su representación geométrica vía la visualización y experimentación con figuras tangibles. Se intenta con esto introducir la idea de razón de semejanza en el reconocimiento de un patrón multiplicativo entre figuras.

Los datos en cada una de las situaciones son representativos, los cuales nos indican que el estudiante comprende la noción de semejanza con el uso del tangram mediante prácticas de medición y comparación de figuras. Por ejemplo, en la situación de acción, la utilización del tangram favoreció la interacción del alumno con sus compañeros para comenzar el proceso de comprender la noción de semejanza, pues ellos, al medir las figuras que conformaban el tangram, tenían el primer acercamiento con los elementos como ángulos y medida de los lados.

En la situación de formulación, cuatro de los equipos logran concluir que se pueden construir figuras de distinto o igual tamaño respetando la misma forma, por lo que podemos decir que la integración de este recurso fue pieza clave para que los alumnos obtuvieran esta deducción. Ello permitió comprender el significado con mayor detalle de figuras semejantes con las características de igualdad de ángulos y valores proporcionales de sus lados.

En la situación de validación se pretendía que los alumnos comprobaran si la estrategia de sobreponer figuras les funcionaría para la construcción de un paralelogramo de mayor tamaño, presentándose tres nuevas estrategias. Dos de ellas giraron en torno al tangram; una es la unión de las piezas 1 y 2 y la de "división de figuras" y la otra un aumento directo de medida. Así, de las estrategias planteadas se destacó la de dividir figuras, pues inicialmente no fue contemplada, dato que sustenta que el tangram facilita la comprensión de la noción implícita de semejanza y les fue posible a cada equipo con su estrategia justificar que la figura encontrada era la solicitada en la pregunta.

Para la formalización se deseaba crear en los alumnos la idea de razón de semejanza, donde ellos pudieran reconocer el patrón de que el paralelogramo 2 era el doble de tamaño que el paralelogramo 1, y se tuviera presente este patrón para deducir las medidas de los paralelogramos 3 y 5. Aunque no se logra la observación del patrón, los estudiantes logran generar una idea implícita sobre lo que significa la razón de semejanza, pues para deducir las medidas del paralelogramo 3, suman la diferencia de valores entre las medidas de un paralelogramo y otro; por ejemplo, en la figura 17, uno de los lados del paralelogramo 2 es 17 cm y la medida del paralelogramo 3 es de 25.5 cm, por lo que para el equipo E_4 la idea de razón de semejanza la manifiestan en pensar que la razón entre dichos paralelogramos en forma multiplicativa representada por 1.5 cm, tomando en cuenta que, aunque aún no abordan el tema, logran tener una idea representativa de la razón de proporción.

5.6. Rediseño de la situación didáctica

Consideramos esta sección como parte de la reflexión de los resultados y para que el lector considere estas sugerencias que, a nuestro parecer, facilita la obtención de mejores resultados de los reportados en este documento. Así se plantea un refinamiento a la situación didáctica agregando dos ítems en la etapa de institucionalización para orientar a la observación de un patrón multiplicativo, esto con la finalidad de que los estudiantes tengan una idea más clara del significado de la razón de semejanza.

En el primer ítem que se agregaría en la situación de institucionalización es el de construir un paralelogramo 4 del doble tamaño que el 3, de la misma manera se les pediría construir un paralelogramo 5 del doble de tamaño que el paralelogramo 4. Para ello se requeriría incluir dos tangram adicionales de siete piezas o algún otro que reuniera las características de la actividad, con mayor medida al utilizado.

En el segundo ítem se pediría realizar comparaciones de los paralelogramos 1 y 2, luego el 2 y 3, de tal forma que se pueda observar con mayor facilidad la razón de semejanza, para posteriormente solicitarles las medidas del paralelogramo 7 y 9, de tal manera que se pueda reconocer el patrón multiplicativo para deducir las medidas del paralelogramo 20 por ejemplo.

Hacemos hincapié de que la situación didáctica se plantea para grupos de segundo año de secundaria donde aún no se aborda el concepto sin embargo logran desarrollar una representación geométrica de la semejanza y de la razón. Será interesante si se toma esta situación, pero enfocado a magnitudes fraccionarias, para analizar las dificultades; y si es así, cómo mejorar su ausencia.

6. Conclusiones

6.1. Implicaciones para la enseñanza

La enseñanza del concepto de semejanza es uno de los temas que presentan dificultad en los estudiantes de nivel básico. Una razón se debe al enfoque algorítmico de ser implementada. Conviene, por lo tanto, dar sentido a conceptos de geometría logrando que el estudiante asuma como responsabilidad de resolver un problema geométrico. La investigación en la teoría de situaciones didáctica asume esta postura considerando que la intencionalidad didáctica de su situación consiste en recrear un medio didáctico favorable que, con el incentivo del reto, haga que el estudiante mejore y reformule sus estrategias.

En las tres primeras etapas de la situación didáctica consideramos que los estudiantes, mediante prácticas de medir y comparar magnitudes, desarrollan una relación multiplicativa entre ellas (ver figura 12); sin embargo, al momento de formalizar esta idea en la última etapa se observó que recurren de nuevo a la estrategia aditiva. Nuestra conclusión considera que la estrategia aditiva representa un obstáculo al momento de trabajar con el tema de semejanza, pero que en actividades donde se usa material tangible, no lo favorece tanto. En la sección 5.6 hacemos algunas recomendaciones para su implicación en la enseñanza para institucionalizar la estrategia de relación multiplicativa de magnitudes. En ese sentido, los datos obtenidos nos muestran que el objetivo principal de cómo el estudiante comprende la noción de semejanza presentó resultados positivos en el desarrollo para su construcción como saber. Mediados por la visualización del material brinda otra representación (geométrica) del concepto e idea sobre la razón de proporcionalidad.

6.2. Limitaciones de la investigación

Siendo el tema de la noción de semejanza en estudiantes de segundo grado, consideramos que el trabajo queda limitado en cuanto el seguimiento de estos estudiantes cuando vean el tema en tercero. Nos parece que el análisis de seguimiento de estos estudiantes de alguna manera nos permitiría evaluar nuestra situación didáctica.

6.3. Sugerencias de investigación

Se sugiere considerar otros materiales didácticos aparte del que se presenta en este documento, empleando magnitudes fraccionarias o decimales; por ejemplo, el empleo de popotes para construir figuras semejantes. Por otra parte, se debe hacer un estudio sobre el obstáculo de la estrategia aditiva, ya que forma parte de los estudiantes reportada en este trabajo y en otras investigaciones. Por lo tanto, estudios de corte histórico, cognitivo, social y epistemológico son pertinentes para profundizar sobre su uso en el tema de semejanza. Otra sugerencia es experimentar, mediante el uso de tecnología, con actividades como, por ejemplo, construir figuras geométricas donde se conserve su forma, mas no sus magnitudes.

Por último, se concluye que el estudiante desarrolla la noción de semejanza si se le propone actividades donde utilice prácticas de medición y comparación de figuras geométricas; consideramos que el desarrollo de estas dos permite construir ideas sobre la razón de proporcionalidad y semejanza.

7. Referencias

Barrantes, M.L., Balletbo, I.F. y Fernández, M.L. (2014). Enseñar geometría en secundaria. En J. Asenjo, O. Macías y J.C. Toscano (eds.), *Memoria del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación* (pp. 1-14). Buenos Aires, Argentina: OEI.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-155.

Castro, C.C. y Céspedes, Y.G. (2009). *Concepciones de los estudiantes de grado octavo sobre el concepto de semejanza*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. En D.A. y D. Soto (eds.), *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (2), 1-10.

Fontes, M.D.M. (2011). La noción de semejanza: una aproximación al estado del arte. En *XIII Memoria de la Conferencia interamericana de educação matemática* (pp. 1-5). Recife, Brasil: CIAEM.

Gamboa, R.A. y Ballestero, E.A. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, *14*(2), 125-142.

Gualdrón, E.P. y Gutiérrez, A.R. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. *Memoria del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 63-82). Zaragoza, España: SEIEM.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática*, *24*(1), 133-157.

SEP. (2011). Plan de estudios 2011. Educación *básica*. México: SEP.

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en geometría en primer año de secundaria. *Números*, (78), 73-94.

De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas

From grief to satisfaction: The emotional knowledge of the mathematics teacher

GARCÍA GONZÁLEZ María del Socorro
PASCUAL MARTÍN María Isabel

RECEPCIÓN: AGOSTO 18 DE 2017 | APROBADO PARA PUBLICACIÓN: OCTUBRE 24 DE 2017

Resumen

Este artículo, centrado en las emociones del profesor de matemáticas, pretende visibilizar las variables afectivas en la enseñanza de las matemáticas y llevar al lector a reflexionar sobre su importancia. Para tal objetivo nos valemos del conocimiento emocional de un profesor novel de matemáticas que imparte clase en segundo grado de educación secundaria. A través de las técnicas de videograbación y la entrevista hemos identificado algunas de las emociones que experimenta durante su práctica y los desencadenantes de ellas, lo que nos ha permitido reafirmar el papel de las emociones como motor de la acción y la relación de las mismas con el conocimiento profesional.

Palabras clave: CONOCIMIENTO EMOCIONAL, MATEMÁTICA EDUCATIVA, PROFESOR DE MATEMÁTICAS.

María del Socorro García González. Profesora titular del posgrado en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Doctora en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI), del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame) y del Consejo Mexicano de Investigación Educativa (COMIE). Su producción académica la ha realizado principalmente con el tema del afecto en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Correo electrónico: mgargonza@gmail.com.

María Isabel Pascual Martín. Profesora en la Universidad de Huelva, España. Máster en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Sociales, Naturales y Matemática en la Especialidad de Matemática. Imparte cursos de Didáctica de la Matemática en el grado de educación primaria. Miembro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Su foco principal de estudio gira en torno al conocimiento especializado del profesor de matemáticas y al conocimiento profesional del formador de maestros. Correo electrónico: isabel.pascual@ddcc.uhu.es.

Abstract
This article focuses on the emotions of the mathematics teacher, aims to visualize the affective variables in the teaching of mathematics and lead the reader to reflect on the importance of these. In order to reach the goal purpose we use the emotional knowledge of a novice teacher of mathematics who teaches second grade in Secondary Education. Through the techniques of video recording and the interview we have identified some of the emotions that they experience during their practice and the triggers of them, which has allowed us to reaffirm the role of emotions as the motor of action and their relationship with professional knowledge.

Key words: EMOTIONAL KNOWLEDGE, MATHEMATICS EDUCATION, MATHEMATICS TEACHER.

Las emociones y la enseñanza de las matemáticas

En matemática educativa, el afecto es el campo de investigación referido al estudio de aspectos inherentes a lo humano, llamados constructos, como las actitudes, emociones, motivación, creencias y valores, que influyen y van formando la vida matemática escolar y social de estudiantes y profesores. Estos constructos tienden a estudiarse de manera separada y tienen como sujetos de estudio a profesores y estudiantes de los niveles escolares básicos hasta los superiores. Los resultados de estos estudios en su conjunto han mostrado que el afecto tiene una alta influencia en la motivación académica y en el aprendizaje escolar (Lewis, 2013; Di Martino y Sabena, 2011; Bekdemir, 2010; Gómez Chacón, 2000). En adelante, debido al interés del escrito nos centraremos en las emociones de los profesores.

Según Flores y Day (2006), el ingreso a una nueva profesión a menudo está asociado con emociones negativas, mientras que la experiencia proporciona herramientas para enfrentar la situación que les permite a las personas superar dichas emociones. En el contexto de la enseñanza, la investigación ha señalado que los maestros en servicio experimentan amor y cuidado por sus alumnos, pero también quedan expuestos a altos niveles de emociones negativas (Anttila *et al*., 2016). De acuerdo con Mevarech y Maskit (2014), los profesores noveles ingresan a la profesión comprometidos a dar lo mejor de sí mismos para el progreso de sus alumnos, pero al mismo tiempo experimentan confusión, estrés y ansiedad. Con el paso de los años, sin embargo, los maestros superan las emociones negativas: se vuelven menos confundidos, menos estresados, menos temerosos y menos inseguros.

En el aula de clase, muchos de nuestros éxitos o fracasos son producto de las emociones que experimentamos; se debe a que la clase es una especie de microcultura que norma nuestro comportamiento y sentimientos. Las emociones de los profesores pueden clasificarse en dos grandes grupos: emociones negativas y emociones positivas. Entre las primeras se encuentran el estrés, la desmotivación y el síndrome de burnout (Schutz y Zembylas, 2009; Rodríguez, Guevara y Viramontes, 2017), que en casos extremos conduce al abandono de la profesión, mientras que en los profesores en formación este tipo de emociones pueden interferir seriamente para convertirse en buenos profesores de matemáticas (Hannula *et al.*, 2007). En el grupo de las positivas, se encuentran emociones como el entusiasmo, la alegría, el orgullo, la satisfacción y el interés por aprender durante o posterior a la clase (Di Martino y Sabena, 201; *Anttila et al.*, 2016).

En matemática educativa, la emoción que más ha sido estudiada, y continúa siéndolo, es la ansiedad matemática, que se refiere a un conjunto de emociones negativas, como el estrés, la congoja o el miedo por enseñar esta rama de la sabiduría. Existen al menos dos razones por las que este tipo de emociones se desencadenan. La primera de ellas es debido a las experiencias emocionales de los docentes cuando eran estudiantes, quienes tuvieron experiencias negativas con las materia (como miedo o frustración); las siguen experimentando cuando se convierten en profesores, al mismo tiempo que conservan la creencia de que las matemáticas son difíciles (Coppola *et al.*, 2012; Di Martino y Sabena, 2011). La segunda razón obedece al conocimiento de la asignatura; esto es, la propia matemática; es decir, muchos de los docentes que imparten matemáticas no son especialistas en los contenidos que marca el currículo escolar (Philipp, 2007).

En una investigación exploratoria con profesores de matemáticas de nivel preuniversitario en México (García-González y Martínez-Sierra, 2016) se encontró que las emociones que experimentan los profesores, tanto positivas como negativas, son desencadenadas en función de tres metas del salón de clases: 1) "que los estudiantes aprendan"; 2) "que los estudiantes se interesen en la clase"; y, 3) "que los estudiantes participen en la clase". Si estas metas se cumplen, las emociones que experimentan los docentes son positivas (agrado, felicidad, orgullo, júbilo); en caso contrario, si las metas no son alcanzadas, los docentes experimentan emociones negativas (decepción, ira, autorreproche, congoja, por citar algunas). Nótese que las emociones encontradas en este estudio están en función de lo que los estudiantes realizan en la clase (metas); estos resultados coinciden con otras investigaciones en dónde se señala que la carga emocional del docente es muy demandante, ya que se trabaja con personas (Rodríguez, Guevara y Viramontes, 2017).

De acuerdo con Zembylas (2005), la importancia de conocer las emociones de los profesores radica en el impacto de estas para la labor docente. Por ejemplo, cuando un profesor toma decisiones en el aula de clases entran en juego variables como sus valores, creencias y emociones. Estas variables actúan y se reflejan en los métodos que se eligen para conducir la clase y en el significado personal que pueda formarse de lo que es enseñar. Por nuestra parte consideramos que es importante que el profesor sea consciente no solo de las emociones que experimenta, sino también de las situaciones que las desencadenan; así, será capaz de poder gestionarlas con miras a beneficiar su práctica docente. Por estas razones nos planteamos como objetivo de investigación indagar sobre el conocimiento emocional de un profesor novel de matemáticas.

El conocimiento emocional del profesor de matemáticas

Para enseñar matemáticas el profesor necesita conocer las matemáticas que va enseñar y cómo las enseñará; esto es, necesita poseer conocimiento matemático y conocimiento didáctico. Si uno falta, la enseñanza no podría darse. En matemática educativa, el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, Carrillo *et al.*, 2014) caracteriza estos dos tipos de conocimiento y añade un subdominio de creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, que según los fundamentos del modelo permea el conocimiento especializado del profesor en torno a los dos tipos de conocimiento señalados anteriormente. Este subdominio de creencias incluye ya aspectos relacionados con las emociones, como es el caso de la identidad profesional.

A manera de hipótesis consideramos que dentro del conocimiento especializado del profesor de matemáticas puede incorporarse el conocimiento emocional, considerándolo parte central del subdominio de creencias del MTSK. ¿Qué se logra al incluirlo? coincidimos con Montes (2016) en que hacerlo nos permitirá comprender al profesor, su conocimiento y su actividad docente con mayor profundidad, aportando un nuevo punto de análisis desde dónde abordar la complejidad del conocimiento profesional y la labor docente, concretamente en el área de matemáticas.

En el contexto de la enseñanza, Zembylas (2007, p. 356) ha acuñado el término conocimiento emocional para referirse al "conocimiento del profesor acerca de sus experiencias emocionales con respecto a sí mismo, hacia otros (por ejemplo estudiantes, colegas) y hacia el contexto social y político más amplio en el que tiene lugar la enseñanza y el aprendizaje". El autor ha puesto de manifiesto la pertinencia de incluir el conocimiento emocional como un conocimiento más del profesor de matemáticas, junto al conocimiento matemático y al conocimiento didáctico para la enseñanza de dicha asignatura. Asimismo, ha resaltado la necesidad de realizar más investigaciones sobre áreas y contextos específicos de la educación para describir los aspectos relevantes del conocimiento del docente en temas variados, debido a que no hay mucha información sobre el tipo de circunstancias que motivan el cambio en el conocimiento del profesor, tanto en su comportamiento como en su evolución emocional. Nuestra investigación pretende contribuir a este llamado, prestando atención al conocimiento emocional del profesor de matemáticas.

Partiendo de la definición de Zembylas, entendemos el *conocimiento emocional del profesor de matemáticas* como el conocimiento de sus emociones y la de sus estudiantes durante la enseñanza. Al decir "conocimiento de sus emociones", nos referimos a que sea consciente de la emoción que experimenta en el aula y lo que la desencadena; este saber íntimo puede ser externado por el profesor al hablar de lo que vivió en su clase.

El constructo emociones en este artículo es entendido desde la "teoría de la estructura cognitiva de las emociones" (Ortony, Clore y Collins, 1996) como las reacciones de valencia ante situaciones generadas en el aula. Ejemplo de ellas son la satisfacción, el miedo o la alegría, entre otras.

La teoría de la estructura cognitiva de las emociones

Las emociones, al igual que el resto de constructos del afecto, son objetos de estudio de la psicología. Desde esta disciplina existen tres fuentes que pueden evidenciar las emociones (Ortony, Clore y Collins, 1996). En primer lugar, se encuentra el lenguaje; una limitación de esta fuente es que con frecuencia resulta difícil expresar con palabras aquello que sentimos. La segunda fuente es la observación de la conducta; el problema de concentrarse en la conducta es que la misma conducta puede ser resultado de emociones muy diferentes o bien conductas diferentes pueden ser indicios de la misma emoción. La tercera fuente es la fisiológica, que adquiere sus complicaciones debido a que tiene que ver con las propiedades y funciones de nuestros órganos y tejidos.

La observación de la conducta y la fuente fisiológica informan de las consecuencias de haber experimentado una emoción, pero no informan sobre sus orígenes; en el caso del lenguaje, es factible poder examinar ese origen mediante la interpretación cognitiva de los acontecimientos que quienes experimentan las emociones puedan realizar, de ahí que nos apoyamos en la teoría de la estructura cognitiva de las emociones, llamada comúnmente teoría OCC.

La elección de esta postura teórica obedece a que se ha mostrado en investigaciones anteriores (Martínez-Sierra y García González, 2014, 2015, 2017) que es un modelo coherente para identificar y explicar las emociones experimentadas en el pasado y narradas por las personas. Aclaramos al lector que esta sección la basamos en la traducción al español de la obra original de Ortony, Clore y Collins (1988) por la editorial Siglo XXI, esto con la finalidad de evitar sobreinterpretaciones en la traducción de las palabras emocionales usadas en la tipología OCC.

La teoría OCC se basa en la idea de que las emociones son desencadenadas por las valoraciones cognitivas (*appraisals*) que la gente hace de una situación, de manera consciente o no, y las define como reacciones con valencia positiva o negativa. La OCC está estructurada como una tipología de tres ramas, que se corresponden con tres tipos de estímulos: 1) un juicio individual sobre la deseabilidad de un evento (un evento es agradable si ayuda al individuo a alcanzar su meta, y es desagradable si lo impide); 2) la aprobación de una acción respecto a normas y estándares sociales; y, 3) la atracción de un objeto, es decir, la correspondencia de sus aspectos con los gustos del individuo, la persona se siente atraída por un objeto o le resulta repulsivo.

Esta teoría especifica 4 clases, 5 grupos y 22 tipos de emociones que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Tipos de emociones concebidas por la OCC.

Clase	**Grupo**	**Tipos (ejemplo de nombre)**
Reacciones ante los aconteci-mientos	Vicisitudes de los otros	• Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*feliz por*). • Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*alegre por el mal ajeno*). • Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*resentido por*). • Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*quejoso por*).
	Basadas en previsiones	• Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (*esperanza*). • Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (*satisfacción*). • Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable (*alivio*). • Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (*decepción*). • Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (*miedo*). • Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento indeseable (*temores confirmados*).
	Bienestar	• Contento por un acontecimiento deseable (*júbilo*). • Descontento por un acontecimiento indeseable (*congoja*).
Reacciones ante los agentes	Atribución	• Aprobación de una acción plausible de uno mismo (*orgullo*). • Aprobación de una acción plausible de otro (*aprecio*). • Desaprobación de una acción censurable de uno mismo (*autorreproche*). • Desaprobación de una acción censurable de otro (*reproche*).
Reacciones ante los objetos	Atracción	• Agrado por un objeto atractivo (*agrado*). • Desagrado por objeto repulsivo (*desagrado*).
Reacciones ante el aconteci-miento y el agente simultánea-mente	Bienestar/ atribución	• Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (*gratitud*). • Desaprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (*ira*). • Aprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (*complacencia*). • Desaprobación de una acción censurable de uno mismo y descontento por el acontecimiento indeseable relacionado (*remordimiento*).

Fuente: Ortony, Clore y Collins, 1996.

La teoría OCC no se guía por las palabras emocionales que usa el sujeto para describir la emoción que experimenta; más bien se centra en el acontecimiento que origina la emoción y a esa descripción le da como nombre una palabra emocional neutra (ver columna "tipos" de la tabla 1). Citemos un ejemplo. Si en una situación se percibe un "descontento por un acontecimiento indeseable", la OCC denomina a la emoción que se experimenta *congoja*. Uno puede pensar en diferentes palabras que pueden expresar ese "descontento"; por ejemplo, añoranza, pesadumbre, sentirse mal, solitario, tristeza. Todas ellas denotan intensidades diferentes, más o menos altas; sin embargo, la OCC usa la palabra congoja por considerarla una palabra emocional neutra.

Metodología. participante y contexto

Para recolectar evidencia del conocimiento emocional del profesor de matemáticas nos valemos del estudio de caso (Stake, 1995). Nuestro caso es el de un profesor novel de 39 años de edad, de formación arquitecto, quien decidió participar voluntariamente. En el momento en que se realizó la toma de datos era la segunda vez que daba clases de matemáticas en segundo grado de educación secundaria (13-14 años) en la capital del estado de Guerrero, México. Además, el informante cursaba el primer año de la Maestría en Docencia de la Matemática que oferta la Universidad Autónoma de Guerrero. En adelante nos referiremos a este profesor con el nombre de Diego, pseudónimo que le hemos asignado.

Para la recogida de datos usamos las siguientes fuentes:

1. Una entrevista biográfica al profesor para conocer las experiencias emocionales propias y de sus alumnos que reconoce en su práctica docente.
2. Autoinformes de experiencias de clase para percatarnos de sus experiencias emocionales.
3. Entrevistas a cuatro estudiantes para conocer las emociones que reconocen de su profesor y de ellos mismos.
4. Observaciones de clase, para confrontar la evidencia de 1, 2 y 3.
5. Entrevistas semiestructuradas al profesor para llenar huecos de información que no arrojen las fuentes consideradas.

Las entrevistas y las observaciones de clase fueron grabadas en video para su posterior análisis.

Análisis de datos y resultados

Las emociones identificadas en nuestro caso de estudio han sido nombradas de acuerdo con las definiciones proporcionadas por la tipología de emociones de la OCC (tabla 1). Hemos identificado solamente dos tipos de emociones en el caso de Diego.

La primera que identificamos, y que reconocemos como más intensa, es la congoja por enseñar matemáticas. La segunda emoción que identificamos fue la satisfacción por comprender un tema y enseñarlo. En los apartados siguientes mostramos una explicación de estos hechos.

En la evidencia del discurso de Diego y sus estudiantes resaltamos en negritas la situación desencadenante de la emoción y en cursiva las palabras emocionales, entre corchetes y en negritas resaltamos la emoción identificada de acuerdo con la OCC, el subrayado para destacar evidencia de los estudiantes o de Diego y entre corchetes hacemos aclaraciones al lector.

Congoja por enseñar matemáticas

En las primeras entrevistas con Diego notamos que se veía a sí mismo como arquitecto, no como profesor de matemáticas, debido a que es arquitectura la profesión que estudió. Fue este perfil el que le permitió ser apto para impartir clases de matemáticas en secundaria; sin embargo, se topó con un obstáculo: su conocimiento especializado, esto es, su conocimiento matemático y su conocimiento didáctico para enseñar matemáticas. Esta situación desencadenó en él su primera emoción, la congoja.

La congoja es una emoción que se define desde la OCC como *descontento por un acontecimiento indeseable*. Interpretamos que el acontecimiento indeseable en el caso de Diego es no sentirse preparado para enseñar matemáticas. Cuando tiene que dar clases experimenta un descontento que desde la perspectiva adoptada lo nombramos congoja. Este descontento lo identificamos en el discurso de Diego con las palabras emocionales sentirse frustrado, no sentirse cómodo, sentirse agobiado, sentirse incómodo.

“Diego: Cuando inicié en segundo año de secundaria a dar clases, como mi **conocimiento de la matemática era muy poco** me *sentía frustrado* por **no poder enseñar más**; *no me sentía cómodo* [**congoja**].”

Un aspecto importante en la práctica docente fue su actuación respecto a la congoja que sentía por enseñar matemáticas; decidió cursar una maestría en docencia de la matemática para incrementar su conocimiento matemático y didáctico; sin embargo, el inicio de la maestría lo hizo sentirse más acongojado debido a que en ella llevaba cursos de matemáticas que no conocía. Ahora no solo era profesor de matemáticas; también era un estudiante de matemáticas.

“Diego: Me metí a la maestría para saber un poquito más; pero eso vino a agravar el problema, porque me sentía *más frustrado* [**congoja**] porque **tenía que ver con los estudiantes matemáticas que no entendía** y acá en la maestría también tenía que ver matemáticas; *me sentía agobiado* [**congoja**] **por tener que trabajar allá** en la escuela con las matemáticas que me hacían *sentir incómodo* y venir aquí a la maestría con las matemáticas que también me hacían sentir *incómodo*."

Diego comenta que durante el primer año que dio clases se mostraba muy estricto con los alumnos, pero solo era una máscara para proteger su falta de conocimiento en el área. Recuerda que ese año reprobó a varios estudiantes, porque les evaluaba muchos rubros, entre ellos la tarea, la disciplina y los exámenes. Recuerda también que a pesar de tener muchos estudiantes en el salón de clases, 40, el salón era muy callado; asegura que tenía un control total del grupo. La actitud estricta que Diego mostraba no permitía que los alumnos se le acercaran; reconoce que el clima de aula era hostil.

"Diego: Cuando llegué [primer año escolar] **era muy estricto**, no se oía ni un ruido, todos bien portados, como yo los necesitaba, callados y con atención al pizarrón, pero de todos modos no aprendían, pero sí trabajaban: tarea que dejaba, tarea que hacían, pero todo *era muy tenso*."

La actitud estricta de Diego fue percibida por los estudiantes. Al respecto, dos de ellos, mujeres (M_3 y M_5) comentan:

"M_3: Siento que el profesor sí ha mejorado, porque cuando empezamos no le entendía mucho y me caía mal, era muy estricto. Una vez no me quiso recibir la tarea y le dije a mis papás; quisieron hablar con él, pero después el maestro se empezó a calmar y ya no hicimos nada. Ha cambiado, ya no es estricto, es más buena onda con nosotros."

"M5: Al principio dejaba mucha tarea, demasiada; le pedíamos que volviera a explicar y no lo hacía. No sé si se dieron cuenta los demás, pero como siempre dejaba mucha tarea, la mayoría la traía mal, y es que nada más dejaba la tarea, no explicaba bien."

Ahondando en las razones por las que Diego era estricto encontramos que había influencia de su profesor de matemáticas de secundaria.

"Diego: En secundaria, mi maestro era el típico macho mexicano: se vestía como un hombre macho, con botas, era alto, *daba miedo*, hablaba poco; no me animaba nunca a hablarle; aunque no entendiera, no me atrevía a preguntar. **Yo lo consideraba un maestro muy estricto** y pensaba que se debía a que era matemático."

Ahora piensa que la imagen del profesor de matemáticas debe de ser otra: un maestro accesible, y esto ha hecho cambiar su práctica docente.

"Diego: Creo que era estricto por mi historia con las matemáticas. Cuando fui alumno, no me fue bien con las matemáticas ni con mi maestro en secundaria. Enfatizo este momento de mi vida porque es el que ahora tienen [los estudiantes] conmigo; están viviendo ese momento que yo viví; no me gustaría que repitieran mi historia, la mala relación con mi profesor y las matemáticas; esto hace cambiar mi propia práctica.

En los episodios anteriores se hace explícito el conocimiento emocional de Diego. Él experimentaba congoja debido a su poco conocimiento matemático. El reconocimiento de esta emoción lo llevó a buscar la manera de superarla y optó por su ingreso a la maestría en docencia de la matemática. Aunque al principio fue difícil por la carga de conocimiento matemático que implicaba, con el paso del tiempo Diego fue aminorando su congoja, pues empezó a comprender la matemática que le enseñaban. Esta situación tuvo impacto en su práctica docente en dos aspectos: adquirió seguridad para enseñar los temas en clase debido a que los comprendía en la maestría y mejoró la relación con sus estudiantes. Ahora interactúa más con ellos; asegura también que les da confianza para que le pregunten dudas, mismas que siempre atiende.

Satisfacción por comprender un tema y enseñarlo

Diego también experimentó una emoción positiva, la satisfacción, desencadenada por comprender un tema y enseñarlo a sus estudiantes. Desde la OCC, la satisfacción se define como *contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable*. Interpretamos que en el caso de Diego el acontecimiento deseable era enseñar matemáticas. Cuando comprende el tema matemático prevé que podrá enseñarlo. Detrás de esta emoción de satisfacción se encuentra la seguridad de tener el conocimiento.

A manera de ejemplo mostramos un relato basado en una observación de clase. En ella Diego se encuentra enseñando el método de eliminación por igualación de un sistema de ecuaciones lineales; se trata del sistema de ecuaciones $3x - 2y = -2$, $5x + 8y = -60$. Pedimos al lector centre la atención en la imagen del pizarrón donde se encuentran enumerados y explícitos los pasos a seguir para resolver el sistema de ecuaciones por este método. Note también que Diego porta la libreta en mano.

Figura 1. Diego explica cómo resolver un sistema de ecuaciones.

Fuente: Archivo del proyecto "Las emociones y el MTSK", UAGro, 2017.

Como comentario diremos que durante la explicación Diego estuvo todo el tiempo en el área del pizarrón.

Episodio 1. El método de eliminación por igualación

1. Diego: A ver, chicos, estamos viendo el método de sustitución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; el método que vamos a ver es el método de eliminación por igualación…
2. [Diego escribe un sistema de ecuaciones en el pizarrón: $3x - 2y = -2$, $5x + 8y = -60$].
3. Diego: En este método contamos con un sistema de dos ecuaciones, que serían las siguientes: [escribe].
4. Diego: A ver, chicos, pongan atención acá. En este método de dos ecuaciones vamos a encontrar una de las dos variables que tenemos; en tanto tenemos x y tenemos y, el siguiente paso será despejar alguna de las dos, y por lo regular se hace en orden. Vamos a despejar a x. Pónganle como primer paso "Despejando a la incógnita x de la ecuación 1". Ecuación 1 [él escribe en el pizarrón]. ¿Qué tenemos que hacer?, ¿qué es para nosotros despejar?, ¿alguien me puede decir?
5. Alumnos 1 y 2: Dejar sola a la x.
6. Diego: Dejar sola a la x. Bueno, tenemos una igualdad. Vamos a pasar la primera ecuación; esta es mi primera ecuación [señala], esta es mi segunda ecuación [señala]. ¿Qué tenemos que hacer?: pasar la ecuación tal y como está.
7. Diego [escribe $3x - 2y = -2$]: Bueno, como ya lo dijimos, para despejar x tenemos que dejarla sola, ¿pero para qué la vamos a despejar? ¿Alguien me puede orientar por qué se va a despejar x?
8. Alumno 3: Para saber su…
9. Alumno 4: Para saber el valor de y.
10. Diego: Para saber el valor de y, dice su compañero. Bueno, vamos a despejar x. Si sabemos que después de la igualdad de un lado está un miembro, que le vamos a llamar 1, y del otro de la igualdad el miembro 2, para despejar x necesitamos quitarle a y, ¿y cómo vamos a quitarle a y?
11. Alumno 1: Igualando…
12. Diego: Vamos a…
13. Alumno 1: Igualar.
14. Diego: Por el método de eliminación, vamos a eliminar a y. Pero si se elimina en un miembro, se elimina en otro. Entonces queda $3x - 2y$. ¿Cómo podré eliminar a y?
15. Alumno 1: $+2y$, sería.
16. Diego: Vamos a ponerle $+2y$. Pero si lo pongo en el primer miembro, en el segundo…
17. Alumno 2: En el segundo también.

18. Diego: Lo pongo en el segundo miembro. Entonces me queda $-2y + 2y$. ¿Qué pasa?, que como tiene la parte literal igual, se puede reducir, se puede sumar, se puede restar; en esta parte, entonces, el primer miembro quedaría como $3x$.
19. Alumno 2: Es igual.
20. Diego: Sería igual a $-2y + 2y$. ¿Cuánto me daría?
21. Alumno 1: 0.
22. Diego: 0, ¿y esto sería?…
23. Alumno 1: –2.
24. Diego: Igual a $-2y + 2y$. ¿Qué tenemos que hacer? Ya tenemos sola a $3x$, porque sabemos que todo número sumado o multiplicado por cero, ¿qué nos va a dar? Entonces el 0 se elimina. Pero todavía me queda acompañada $3x$; todavía la tengo acompañada y necesito que esté sola, necesito despejarla, ¿qué puedo hacer?
25. Alumno 1: Encontrar un valor que divida a x, que sería 3.
26. Diego: Encontrar un valor que divida a x. Como está multiplicando, su operación inversa sería la división. Vamos a encontrar a 3, ¿para qué lo va a dividir?... Para encontrar la unidad, para que x quede con 1; no es para desaparecerla; si divide al primer miembro, va a dividir al…
27. Alumno 2: al segundo.
28. Diego (con libreta en mano): Al segundo va a dividir entre 3, y nos quedaría 3 entre 3…
29. Alumno 1: 1.
30. Diego (con libreta en mano): 1 de qué, uno de x, que sería igual a $-2y + 2y$ entre 3. La unidad puede ir o no, porque la parte literal, aunque no se ponga un número, sabemos que acompaña a un número, ¿sí? Ya tenemos la primera, ya encontramos o despejamos a la primera ecuación, ¿qué tengo que hacer?
31. Alumno 1: Despejar la segunda ecuación.

En el episodio anterior es notorio que al enseñar el método lo hace de manera explícita, declarando a los estudiantes de forma ordenada y detallada cada paso de la resolución del sistema de ecuaciones (ver puntos 3, 5, 6, 9, 13, 17, 23, 25 y 29 del episodio). Notamos también que se acompaña de su libreta de apuntes; interpretamos que esto le da seguridad en su conocimiento matemático. Al observar lo explícito del modo de enseñar el método y el énfasis en las operaciones inversas aditivas y multiplicativas, en lugar del "pasa sumando" o "pasa dividiendo", entrevistamos a Diego para conocer a qué obedecía este hecho. Comentó que se debía a que en la maestría le enseñaron este modo de resolver ecuaciones; aprenderlo le brindó seguridad para poder enseñarlo en clase y al hacerlo experimentó satisfacción.

"María: ¿Por qué es tan explícito en los pasos de los sistemas de ecuaciones? Por ejemplo, no usa las palabras pasa sumando, o restando."

"Diego: No, yo les enseño lo que pasa en realidad cuando se dice pasa sumando o restando, usando los inversos aditivos o los multiplicativos, para que ellos se den cuenta de cómo van desapareciendo los términos para dejar despejada una literal. A mí nunca me lo enseñaron; yo me preguntaba cómo era que la variable se despejaba. **Ahora que lo aprendí** en el curso de la maestría *me gusta* compartirlo con mis estudiantes [**satisfacción**] para que no aprendan a resolver de manera mecánica, sino que entiendan lo que sucede en el proceso de solución, que conozcan las propiedades matemáticas que están detrás de los pasos. **Quiero que sepan bien** cómo es que se eliminó de un lado y pasó a otro. Hace un año me acuerdo que yo decía: "Brincó al otro lado de la igualdad" [se ríe]. Es que no conocía las propiedades que se estaban cumpliendo, pero ahora lo sé y m*e gusta conocerlo y compartirlo* [**satisfacción**] **para que conozcan como yo lo he conocido**."

Esta forma de resolver un sistema de ecuaciones paso por paso es una creencia de Diego. Espera que sus alumnos solucionen de esta manera los ejercicios, porque, a decir de él, solo así comprenderán el proceso.

"María: ¿Y usted cree que los estudiantes han aprendido el método?"

"Diego: Sí, ahora lo hacen, pero me cuesta trabajo porque *algunos siguen haciendo lo que ellos piensan*, resuelven como ellos quieren, se saltan pasos, <u>no lo resuelven como quisiera que lo hagan, paso por paso</u>."

La congoja y la satisfacción de Diego forman parte de su conocimiento emocional. Estas emociones tienen como situaciones desencadenantes su conocimiento especializado. Así, su conocimiento matemático (el tema a enseñar) le causó la congoja; cuando comprendió el tema, la congoja se transformó en satisfacción y movilizó su conocimiento didáctico al ser capaz de enseñar el tema. En este segundo tipo de conocimiento la creencia de cómo se debe resolver un sistema de ecuaciones desde su propia experiencia –esto es, paso a paso– llevó a Diego a enseñarlo de igual manera.

En el caso de Diego, si bien solo encontramos dos tipos de emociones, se ilustra cómo el conocimiento emocional está influyendo su conocimiento especializado. Este resultado nos anima a apoyar la hipótesis de partida; esto es, la inclusión del conocimiento emocional dentro del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Conclusiones

El conocimiento emocional identificado en Diego nos ha llevado a percatarnos de la importancia de las emociones en la labor docente. Por ejemplo, cómo es que la emoción negativa de congoja lo lleva a transformarse en un tipo de profesor estricto, que no disfruta su clase de matemáticas, pero la seguridad al comprender un tema y enseñarlo lo lleva a experimentar satisfacción, y esto lo transforma en otro tipo de profesor, uno que disfruta su labor y mantiene una relación cordial con los estudiantes.

El caso de Diego es común en profesores noveles. Al principio, todavía comprometido con la profesión y dar lo mejor de sí mismos para el progreso de los alumnos, los profesores son propensos a experimentar emociones negativas, y con el tiempo estas se superan (Mevarech y Maskit, 2014). A lo largo del tiempo, la práctica de la enseñanza hace que el profesor solidifique y manipule sus conocimientos matemáticos y didácticos, y con ello sus creencias, emociones y actitudes hacia las matemáticas se van también estabilizando. Así, si un profesor reconoce que tiene dominio de la matemática tanto en su comprensión como en su enseñanza, seguramente las emociones que se desencadenarán serán más positivas; mientras que si se considera con poco dominio matemático y didáctico, las emociones serán más negativas, como la congoja experimentada por Diego.

En Diego es evidente cómo su creencia de lo que es enseñar matemáticas se encontraba influenciada por lo que vivió como estudiante en secundaria, con un profesor estricto. Cuando comenzó a impartir sus clases repetía el modelo de profesor que conocía; tal influencia ha sido ya reportada como común en la profesión docente (Philipp, 2007).

La investigación sobre emociones en matemática educativa ha señalado que las emociones que se experimentan en la clase, tanto positivas como negativas, nos preparan para la acción. En el caso de Diego, la emoción de congoja lo llevó a estudiar una maestría en docencia de la matemática para fortalecer su conocimiento matemático.

En relación a los resultados y conclusiones de esta investigación, asumimos las limitaciones propias de la identificación de emociones desde la teoría OCC, relacionadas con la deseabilidad en las respuestas del informante, que han sido trianguladas metodológicamente a través de la entrevista y la confrontación entre las dos autoras de este escrito. Asimismo, declaramos que los resultados presentados, aunque forman parte de una investigación más amplia, son una sección de la práctica docente del informante en un tema concreto, y por lo tanto tiene las limitaciones propias de haber excluido el análisis transversal de la práctica del profesor en su totalidad.

La evidencia encontrada sobre la relación entre las emociones y el conocimiento profesional de Diego abre camino a una nueva línea de investigación que señalamos como prospectiva del estudio. En este sentido, y teniendo en cuenta las particularidades del conocimiento especializado del profesor de matemáticas postuladas en el modelo MTSK, cabría preguntarse: ¿cuáles son las relaciones que se pueden establecer entre el conocimiento especializado del profesor y las emociones que expresa?, ¿cuál es el papel del conocimiento especializado del profesor como detonante de dichas emociones? En este artículo hemos podido establecer indicios sobre estas relaciones. A pesar de que no era el foco principal del estudio presentado pueden servir de antesala a una investigación más exhaustiva con la que contribuyamos a esclarecer las preguntas señaladas.

Finalmente, queremos proponer al lector, sobre todo si es profesor de matemáticas, que se sirva del caso de Diego para reflexionar y que reconozca sus sentimientos en el aula de clases, y que así como posee conocimientos disciplinares y didácticos, también debe poseer conocimiento emocional de su labor como docente.

Referencias

Anttila, H., Pyhältö, K., Soini, T. y Pietarinen, P. (2016). How does It feel to become a teacher? Emotions in teacher education". *Social Psychology of Education*, *19*(3), 451-473.

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers' mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 311-328. http://doi.org/10.1007/s10649-010-9260-7

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M.A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Coppola, C., di Martino, P., Pacelli, T. y Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education, 17*(3-4), 101-118.

di Martino, P. y Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. En K. Kislenko (ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI* (pp. 89-105). Tallinn University.

Flores, M.A. y Day, C. (2006). Contexts which shape and reshape new teachers' identities: A multiperspective study. *Teaching and Teacher Education*, *22*(2), 219-232.

García-González, M. y Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). Málaga, España: SEIEM.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional*. Madrid, España: Narcea.

Grootenboer, P. y Marshman, M. (2016). *Mathematics, affect and learning. Middle school students' beliefs and attitudes about mathematics education*. Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Hannula, M.S., Liljedahl, P., Kaasila, R. y Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. En J.H. Woo, H.C. Lew, K.S.P. Park y D.Y. Seo (eds.), *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 153-156). Seul, Korea.

Lewis, G. (2013). Emotion and disaffection with school mathematics. *Research in Mathematics Education*, *15*(1), 70-86. http://doi.org/10.1080/14794802.2012.756636

Martínez-Sierra, G. y García González, M.D.S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 234-250. http://doi.org/10.1080/14794802.2014. 895676.

Martínez-Sierra, G. y García-González, M.S. (2016). Undergraduate Mathematics Students' Emotional Experiences in Linear Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 87-106. http://doi.org/10.1007/s10649-015- 9634-y

Martínez-Sierra, G. y García-González, M.S. (2017). Students' emotions in the high school mathematics classroom: The appraisals in terms of a structure of goals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(2), 349-369. http://doi.org/10.1007/s10763-015-9698-2

Mevarech, Z. y Maskit, D. (2014). The teaching experience and emotions it evokes. *Social Psychology of Education*, *18*(2), 241-253. http://doi.org/10.1007/s11218-014-9286-2

Montes, M.A. (2016). Las creencias en MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 55-59). Huelva, España: SGSE.

Ortony, A., Clore, G.L. y Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions* (J. Martínez y R. Mayoral, traductores). España: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988)

Pekrun, R. y Schutz, P.A. (2007). Where do we go from here? Implications and future directions for inquiry on emotions in education. En P.A. Schutz y R. Pekrun (eds.), *Emotion in education*. San Diego, California, Estados Unidos: Academic Press.

Philipp, R.A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. Lester (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, Carolina del Norte, Estados Unidos: Information Age Publishing.

Rodríguez, J., Guevara, A. y Viramontes, A. (2017). Síndrome de burnout en docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, *7*(14), 45-67.

Schoenfeld, A. (1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem-solving skills. En R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 345-395). Nueva York, Estados Unidos: Academic Press.

Schutz, P. y Zembylas, M. (2009). Introduction to advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives. En P. Schutz y M. Zembylas (eds.), *Advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives*. Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, California, Estados Unidos: Sage.

Zembylas, M. (2005). Beyond teacher cognition and teacher beliefs: the value of the ethnography of emotions in teaching. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, *18*(4), 465-487.

Zembylas, M. (2007). Emotional ecology: The intersection of emotional knowledge and pedagogical content knowledge in teaching. *Teaching and Teacher Education*, *23*(4), 355-367.

Guía editorial
IE Revista Investigación Educativa

IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech –editada por la Red de Investigadores Educativos Chihuahua AC– es una publicación semestral que responde a estándares científicos y académicos nacionales e internacionales. Tiene una política de acceso abierto al contar con formato electrónico en el Open Journal Systems (OJS) y cuenta además con versión impresa. Se reconoce como un espacio abierto y plural para la divulgación del conocimiento en diversas disciplinas relacionadas con las ciencias de la educación que da cabida a trabajos originales e inéditos, tales como:

a) *Reportes de investigación*: investigaciones empíricas con sustento teórico que posibiliten un avance en la comprensión del fenómeno en estudio; reportes de intervenciones educativas, estudios evaluativos o diagnósticos que muestren una aproximación teórico-metodológica innovadora, que tengan un amplio espectro –estudios nacionales, internacionales o que valoren otros resultados–, revisiones: estados del arte o estados de conocimiento sobre un tema. No se aceptan protocolos o anteproyectos de investigación.

b) *Ensayos*: reflexiones sobre temas de investigación educativa que contribuyan a la reformulación o conceptualización de un problema, tema o metodología, que se ubiquen en el debate actual y manejen una bibliografía pertinente y actualizada.

c) *Reseñas*: análisis y discusión sobre el contenido de un documento que por su temática sea vigente y de interés para el campo de la investigación educativa.

1. Características de las colaboraciones

1.1. Los artículos tendrán una extensión de entre 6,000 y 9,000 palabras, incluyendo gráficas, tablas, notas y referencias. Para las reseñas, la extensión no debe sobrepasar 3,500 palabras.

1.2. Los reportes de investigación deberán contener:

- 1.2.1. Título del reporte.
- 1.2.2. Título en idioma inglés.
- 1.2.3. Resumen en un solo párrafo con una extensión máxima de 200 palabras que señale los aspectos más relevantes del trabajo.
- 1.2.4. Palabras clave, máximo cinco.
- 1.2.5. *Abstract*, traducción del resumen al idioma inglés.
- 1.2.6. *Key words*, palabras clave en el idioma inglés.
- 1.2.7. Introducción o presentación donde se exprese el o los propósitos de la investigación.
- 1.2.8. Apunte metodológico, donde se expone de manera sintética el método, las técnicas y los instrumentos utilizados.
- 1.2.9. Resultados de la investigación, o los avances de la misma, expresados de manera clara y precisa.

1.2.10. Conclusiones.
1.2.11. Referencias.

Nota: los aspectos, 1.2.7, 1.2.8, 1.2.9 y 1.2.10 no tienen que aparecer necesariamente como subtítulos.

1.3. Los ensayos deberán sujetarse al siguiente formato:
1.3.1. Título del ensayo.
1.3.2. Título en idioma inglés.
1.3.3. Resumen, con las características citadas en el punto 1.2.3.
1.3.4. Palabras clave, máximo cinco.
1.3.5. *Abstract,* traducción del resumen al idioma inglés.
1.3.6. *Key words*, palabras clave en el idioma inglés.
1.3.7. Introducción o presentación, donde se exprese el o los propósitos del texto.
1.3.8. Desarrollo, donde se exponga la o las tesis del autor.
1.3.9. Conclusiones.
1.3.10. Referencias.

Nota: los aspectos, 1.3.7, 1.3.8 y 1.3.9 no tienen que aparecer necesariamente como subtítulos.

1.4. Las reseñas deberán contener:
1.4.1. Análisis crítico del contenido de la obra reseñada que inviten a su lectura, destacando sus principales características y estableciendo valoraciones o relaciones con problemas, obras o discusiones del campo de estudio.

Nota: los subtítulos son de libre elección del autor, así como el uso de referencias.

1.5. Los trabajos deberán enviarse en formato Word.
1.6. Deberá incluirse, junto con el trabajo, una portada con el nombre del autor o autores (máximo tres), adscripción y cargo que desempeña, dirección institucional, teléfono y correo electrónico.
1.7. El uso de notas al pie de página será de carácter aclaratorio o explicativo, sirviendo para ampliar o ilustrar, pero no para indicar fuentes bibliográficas.
1.8. Se usará letra Times New Roman, número 13, a espacio y medio (1.5). Margen de 2.5 cm por lado, justificado, sin doble espacio entre párrafos y con sangrías.
1.9. Dentro del texto, las citas bibliográficas se presentarán de la siguiente manera: (Ramos, 2006), (Torres, Núñez y Hernández, 2009), y para citas textuales [Pérez, 2005, pp. 243-244], [Luria y López, 1995, p. 345].
1.10. Para acotar algo se emplearán guiones medios (– –).
1.11. El uso de las comillas solo se emplearán para citas textuales menores a 40 palabras; en caso de querer resaltar alguna idea se debe emplear la letra *itálica.*
1.12. El uso de títulos, subtítulos de primer, segundo y tercer nivel será como se muestran en el siguiente ejemplo:

I. TÍTULO DE PRIMER NIVEL
1.1. Subtítulo de segundo nivel
1.1.1. Subtítulo de tercer nivel

1.13. Las tablas o cuadros de datos se numerarán con arábigos de manera continua, empleando el siguiente formato:

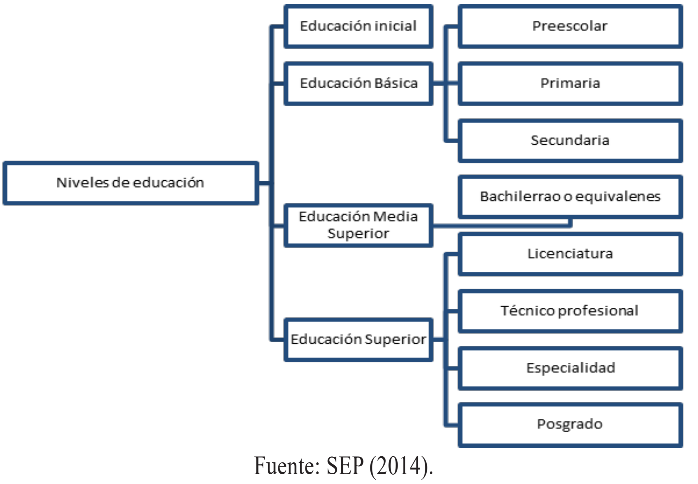
Tabla 1. Relación de trabajos de investigación

Nombre del artículo/ tesis	Fecha de publicación	Autor(es)	Aportes teóricos
La evaluación por competencias en la comunidad de Cuajimalpa	Septiembre, 2013	Núñez, Armando y López, María.	xxxxxxxx
El estado del conocimiento en Chihuahua	Noviembre, 2015	Xxxx	xxxxxx

Fuente: Elaboración personal (o según la fuente consultada).

1.14. El uso de figuras podrá darse dentro del documento en numeración continua, empleando el siguiente formato:

Fig. 1. Niveles educativos del SEN.



Fuente: SEP (2014).

Para garantizar la calidad de la impresión o la vista en pantalla se solicita insertar imágenes en formato JPG de alta resolución (300 puntos por pulgada, dpi).

1.15. Las referencias deberán presentarse al final del texto, como se muestra en los siguientes ejemplos y utilizando sangría francesa:

1.15.1. Ejemplo de un solo autor de libro:

Álvarez Gayou, J.J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.

1.15.2. Ejemplo de dos o más autores de libro:

Hernández, S.R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill.

1.15.3. Ejemplo de sección de libro:

Covarrubias, P. (2016). Una mirada de evaluación al Programa Nacional para la Atención de Alumnas y Alumnos con Aptitudes Sobresalientes implementado en el estado de Chihuahua. En S. Valdez, G. López, A. Borges, J. Betancourt y R. Zambrano (coords.), *Programas de intervención para niños con altas capacidades y su evaluación* (pp. 77-92). Guadalajara, México: Manual Moderno.

1.15.4. Ejemplo de artículo de revista:

Covarrubias, P.P. (2009). Identificación temprana de niños y niñas sobresalientes en preescolar. *IdeAcción*, *x*(xx), 60-76.

Donde "*x"* es el volumen o año y "xx" es el número.

1.15.5. Ejemplo de documento de sitio web:

Abalde, P.E. y Muñoz, C.J. (1992). *Dialnet*. Recuperado de http://ruc.udc.es/xmlui/bitstream/handle/2183/8536/CC-02art7ocr.pdf?sequence=1

Nota: como una herramienta adicional, en la siguiente dirección electrónica se podrá consultar la notación de la ficha bibliográfica para casos específicos: http://www.referencing.port.ac.uk/index.html.

2. Envío de colaboraciones

2.1. El envío de los trabajos se hará a través de la plataforma Open Journal Systems (OJS), disponible en la página web de la revista (www.rediech.org/ojs/2017), atendiendo a las siguientes recomendaciones:
2.1.1. Acceder a la opción "Registro" y proporcionar la información solicitada.
2.1.2. Generar un nombre de usuario que contenga únicamente minúsculas, guiones o números; por ejemplo: estefania_dominguez, ricardo86, etcétera.
2.1.3. Seguir las instrucciones que le proporcione el sistema. Escribir al correo electrónico revista@rediech.org si tiene alguna duda o comentario.

3. Proceso de dictaminación

3.1. Todos los trabajos se someten a dos etapas de evaluación. La primera por parte del Comité Editorial con el objeto de revisar si cubre los criterios establecidos por la revista; y la segunda –en caso de ser aceptado el trabajo– a cargo de pares académicos especialistas en el tema. La revisión se realiza bajo el procedimiento doble ciego y solo en caso de discrepancias en los resultados los trabajos se someten a la dictaminación de un tercer árbitro.

3.2. El proceso de evaluación concluye en un máximo de dos meses contados a partir de la notificación de recepción del trabajo. Posteriormente se da a conocer el resultado al autor, que puede ser:
3.2.1. Aceptado.
3.2.2. Aceptado con modificaciones.
3.2.3. Condicionado a una revisión y nueva presentación.
3.2.4. Rechazado.
3.3. Las observaciones y recomendaciones de los dictaminadores se envían al autor o autores para que se incorporen en el trabajo.
3.4. El dictamen final es inapelable.
3.5. Los editores se reservan el derecho de hacer las modificaciones de estilo que consideren necesarias.

4. Cesión de derechos

4.1. El autor o autores conceden el permiso para que su material se difunda en la versión impresa y electrónica de la revista, así como en las bases de datos que la incorporan. Ceden los derechos patrimoniales de los artículos publicados a la Red de Investigadores Educativos Chihuahua AC una vez que autorizan la versión final del escrito, pero conservan en todo momento sus derechos morales, conforme a lo establecido en las leyes correspondientes. El formato será proporcionado al(los) autor(es) una vez que se notifique la aceptación de la propuesta.
4.2. La revista mantiene una política de acceso abierto a través del sistema OJS y sus contenidos pueden ser usados gratuitamente para fines académicos, dando crédito a los autores y a la propia publicación.

5. Declaratoria de conflicto de intereses

5.1. Autores: son responsables de revelar las relaciones personales y financieras que pudieran sesgar los resultados presentados en su trabajo.
5.2. Apoyo a los proyectos: los autores deben describir y mencionar, en su caso, el papel del patrocinador del estudio.
5.3. Dictaminadores: los evaluadores o miembros del Comité Editorial que participen en el proceso deben dar a conocer cualquier conflicto de interés que pueda influir en la emisión del resultado. En este caso deberán comunicar la situación al editor de la revista y declinar su participación si consideran que es lo más apropiado.

Al enviar sus trabajos, los autores aceptan estas instrucciones, así como las normas editoriales de *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*.

Para asuntos editoriales dirigirse al correo electrónico revista@rediech.org o comunicarse al teléfono 52+ (614) 415-1998.

www.rediech.org/ojs/2017

Última actualización a esta guía: agosto 30 de 2017.

SUSCRIPCIONES / IE REVISTA DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA DE LA REDIECH

Llene los siguientes datos y envíelos escaneados o por correo electrónico.

Nombre
____

RFC
____

Institución
____

Dirección (calle, número y colonia)
____

CP
____

Ciudad, estado (provincia) y país
____

Teléfono
____

Correo electrónico
____

REQUIERE COMPROBANTE FISCAL Sí No

COSTO POR DOS NÚMEROS AL AÑO*

México

Individual	\$300.00 MN
Institucional	\$1,200.00 MN

Extranjero

Individual	USD \$50.00
Institucional	USD \$160.00

FORMA DE PAGO

Banco	BBVA-Bancomer
Cuenta	0178438560
Beneficiario	Red de Investigadores Educativos Chihuahua A.C.

Enviar datos del suscriptor y comprobante de pago al correo suscripciones@rediech.org.
Calle Efrén Ornelas n. 1406, colonia Obrera, Chihuahua, Chih.
Teléfono 52+ (614) 415-1998
www.rediech.org

* El costo incluye gastos de envío, el cual se realizan a través de Correos de México en destinos nacionales y paquetería especializada para el extranjero.

IV Congreso de Investigación Educativa

en el estado de Chihuahua

REDIECH Red de Investigadores Educativos CHIHUAHUA

Octubre de 2018

Lizbet Alamillo Sánchez • Eduardo Carlos Briceño Solís • Gabriela Buendía Ábalos • Alfonso Rafael Cabrera Galicia • Marisela Ivette Caldera Franco • Alberto Camacho Ríos • Adriana Galicia Sosa • María del Socorro García González • Lorena Landa Habana • Gonzalo Medina Ramírez • María Isabel Pascual Martín • Samantha Analuz Quiroz Rivera • Ruth Rodríguez Gallegos • Isabel Tuyub Sánchez • Verónica Valenzuela González • José David Zaldívar Rojas

REDIECH
Red de Investigadores Educativos
CHIHUAHUA