revista de investigación educativa de la Rediech

• Volumen 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550 •

Procesos de razonamiento covariacional durante la integración cognitiva de conceptos de matemáticas y de física en la interpretación del gasto hidráulico

Processes of covariational reasoning during the cognitive integration of mathematics and physics concepts in the interpretation of hydraulic flow

Alfonso Castañeda Ovalle
Martha Leticia García Rodríguez

Resumen

El objetivo del presente estudio fue analizar, mediante la aproximación teórica de la integración cognitiva, el proceso de razonamiento covariacional de un grupo de estudiantes cuando interpretan el concepto de gasto hidráulico. Se diseñaron cinco actividades, aplicadas en modalidad virtual, de las cuales dos se reportan en este documento, que incluyeron el uso de simuladores dinámicos y cuadernillos digitales de trabajo. Las respuestas, gráficas y comentarios de los estudiantes fueron analizados con elementos teóricos de la integración cognitiva, del razonamiento variacional y covariacional y del gasto hidráulico. Se identificó la forma en que los estudiantes dan sentido a sus ideas matemáticas cuando analizan el fenómeno físico del llenado de cilindro; cómo movilizan su razonamiento variacional y covariacional para apoyar el entendimiento de las variables relacionadas con el gasto hidráulico y el cambio en las variables altura y volumen del líquido. El análisis de las evidencias permitió conocer sobre los procesos de integración cognitiva entre elementos de las matemáticas y la física y reconocer comportamientos relacionados con distintos niveles de razonamiento variacional o covariacional exhibidos por los estudiantes.

Palabras clave: Actividades dinámicas, llenado de recipientes, integración de espacios mentales.

Abstract

The objective of this study was to analyze, through the theoretical approach of cognitive integration, the process of covariational reasoning on a group of students when they interpret the concept of hydraulic flow. Five activities were designed and applied in virtual mode, two of which that included the use of dynamic simulators and digital workbooks are reported in this work. The answers, graphics and comments of the students were analyzed with theoretical elements of cognitive integration, of the variational and covariational reasoning, and of hydraulic flow. The way in which students make sense of their mathematical ideas was identified when they analyze the physical phenomenon of filling one cylinder; to observe how they mobilize their variational and covariational reasoning to support their understanding of the variables related with hydraulic flow and change in height and volume variables of the liquid. The analysis of the evidence allowed to know about the processes of cognitive integration between elements of mathematics and physics, and to recognize behaviors related with different levels of variational or covariational reasoning exhibited by the students.

Keywords: Dynamic activities, filling of containers, integration of mental spaces

Recibido: 6 de diciembre de 2022 | *Aprobado:* 7 de junio de 2023 | *Publicado:* 21 de junio de 2023
https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v14i0.1766

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

Introducción

Las matemáticas se han identificado como el fundamento de las ciencias (Huynh y Sayre, 2019); al asumirlo se reconoce la necesidad de que los estudiantes logren un uso flexible de ellas para su estudio en cursos superiores, ciencias e ingeniería (Hu y Rebello, 2013). Esto significa, en el caso de la física, que realicen más que la aplicación de algoritmos, se requiere comprender el significado que subyace en los símbolos matemáticos así como su sintaxis (Huynh y Sayre, 2019); asumir las matemáticas como un marco implícito que apoye la comprensión y aprendizaje de conceptos, que describa escenarios físicos, y que facilite la interpretación de cálculos y resultados en términos de la situación objeto de estudio (Schermerhorn y Thompson, 2019); ambas tareas son difíciles para los estudiantes.

En trabajos elaborados en el campo de la educación en física y en matemáticas se han documentado dificultades que tienen los estudiantes para lograr fluidez matemática. Los estudiantes no integran de forma productiva sus conocimientos de física y matemáticas aunque tengan los conocimientos matemáticos necesarios para ello. Esto es, relacionan símbolos de física y matemáticas sin atender al significado físico de la situación (Hu y Rebello, 2013) y que la transferencia de recursos matemáticos a un contexto de la física no ocurre tan frecuente y fácilmente como se esperaría (Nguyen y Rebello, 2011). De acuerdo con Huynh y Sayre (2019), para dar sentido al mundo físico se requiere de integrar los contextos de matemáticas y de física, y considerarlas en su rol estructural en el cual las matemáticas son significantes para la construcción de un concepto físico (Uhden et al., 2012).

Fauconnier y Turner (1998) propusieron una aproximación teórica para describir cómo se crean nuevos significados "integrando", de forma selectiva, información que proviene de experiencias previas. Bing y Redish (2007) analizaron cómo se construye la combinación de los conocimientos de la física y las matemáticas y propusieron el término "cognitivo" para describir dicho proceso, y Bollen et al. (2016) consideran que los modelos cognitivos son útiles para organizar los hallazgos de investigaciones

Alfonso Castañeda Ovalle. Profesor de la Academia de Física del Colegio de Bachilleres, Plantel 1 El Rosario, Ciudad de México. Es Maestro en Docencia Científica y Tecnológica por el IPN y cuenta con especialidad en competencias docentes por la Universidad Pedagógica Nacional en México. Participo como coautor del libro *La diversidad de actividades en el proceso de enseñanza aprendizaje del docente en línea*, con el capítulo "Actividades interactivas ¿indispensables?" (2019). Actualmente es doctorante en Matemática Educativa en el CICATA-Legaria del IPN-México. Correo electrónico: alfonso.castaneda@bachilleres.edu.mx. ID: https://orcid.org/0000-0003-4001-9086.

Martha Leticia García Rodríguez. Profesora-investigadora del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México. Es Doctora en Matemática Educativa y tiene el reconocimiento del Sistema Nacional de Investigadores, Nivel 1. Entre sus publicaciones recientes se encuentra el capítulo de libro "Mathematical competencies framework meets problem-solving eesearch in Mathematics education" (2023). Es miembro del Consejo Mexicano de Investigación Educativa y de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática. Correo electrónico: mlgarcia@ipn.mx. ID: https://orcid.org/0000-0003-2435-1334.

en educación, en forma análoga al uso de los modelos en física para dar sentido a los fenómenos naturales. Con base en dichas opiniones, en este trabajo se adopta el nombre de "integración cognitiva" para referirse al proceso de combinar conocimientos de física y matemáticas.

Una revisión de literatura en educación matemática y física ha permitido identificar que el razonamiento covariacional es importante no solo para la comprensión de conceptos de ambas disciplinas sino también para dar sentido a la combinación de estos. Kurzer (2018) considera que la investigación actual sobre este tema se centra en determinar cómo el razonamiento covariacional limita o apoya las habilidades de los estudiantes en matemáticas, particularmente en cálculo, en una variedad de contextos y representaciones. En su investigación retoma trabajos realizados en el contexto de la física en los que se estudia el desempeño de los estudiantes al analizar la variación de la altura en relación con el aumento del volumen de un líquido (Weber y Thompson, 2014; Paoletti y Moore, 2017) o la interpretación visual de la pendiente en la representación gráfica de una relación covariacional en el llenado de una botella (Byerley et al., 2016) Sin embargo, a pesar de que las tareas mencionadas parten de un contexto de la física, el interés se centra en el razonamiento covariacional como parte esencial del estudio de las matemáticas.

En investigaciones recientes se identifica la de Van den Eynde et al. (2020), quienes se enfocan en la modelación y análisis del proceso de razonamiento de los estudiantes mientras integran matemáticas y física en el contexto de la ecuación del calor. Retoman el trabajo de Fauconnier y Turner (2003) y desarrollan un diagrama adaptando el marco de la integración conceptual desarrollado por Gerson y Walter (2008), compuesto por el espacio físico, el espacio matemático y un espacio de salida denominado "espacio mezclado". En cada uno de estos espacios identificaron elementos surgidos del análisis e interpretación de las acciones realizadas por los estudiantes, para después conectarlos cuando detectaron una integración cognitiva. Este paso fue importante, ya que les permitió capturar no solo el producto sino también el proceso de razonamiento de los estudiantes y conocer sobre la comprensión de conceptos matemáticos.

El presente trabajo se ubica en la línea de investigación de la integración de conocimientos y habilidades de la matemática para el estudio de un fenómeno de la física. En contraste con lo considerado por Kurzer (2018), en esta propuesta el foco está en el razonamiento covariacional como una habilidad importante para el estudio del concepto de gasto hidráulico en el contexto del llenado de un recipiente, y se diferencia del trabajo de Van den Eynde et al. (2020) en que ellos interpretaron las acciones realizadas por los estudiantes pero no proporcionaron un marco referencial para el análisis.

En este documento el razonamiento covariacional se analiza a partir de la aproximación teórica de Thompson y Carlson (2017) e incluye seis secciones: (1) elementos

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

teóricos relacionados con el concepto de gasto hidrodinámico, (2) una breve revisión de la forma en que se ha utilizado la aproximación teórica de la integración cognitiva en el estudio de la física y las matemáticas, (3) investigaciones sobre los procesos de razonamiento covariacional de los estudiantes, (4) métodos y procedimientos utilizados en esta investigación, (5) análisis de datos y discusión de los resultados, (6) reflexiones finales.

La integración cognitiva en el estudio de la física y las matemáticas

La teoría de la integración cognitiva desarrollada por Fauconnier y Turner (2003) en el contexto de la lingüística considera que los conocimientos se alojan en la memoria de largo plazo organizada en forma de patrones asociativos denominados "espacios mentales", que son activados de manera simultánea. Esta memoria interpreta las percepciones del cerebro y la mente las combina en el espacio de salida en formas nuevas y emergentes dando sentido a las estructuras lingüísticas presentes en los espacios de entrada. Estos autores consideran que el proceso de la integración cognitiva ocurre en un nivel subconsciente, de manera no lineal ni determinística tal como ocurre en el proceso de aprendizaje, por lo que la forma en que una persona mezcle dos estructuras lingüísticas depende fuertemente de las señales que reciba del aporte lingüístico y de su contexto físico y mental.

En la literatura de investigación educativa en física, se identificaron autores que se abocaron a conocer sobre procesos de integración de física y matemáticas: Sherin (2001) investigó cómo los estudiantes entienden las ecuaciones de física y plantea la hipótesis de que lo hacen en términos de un vocabulario de elementos que él llama "formas simbólicas". Bing y Redish (2007) propusieron un modelo para representar la forma en que los estudiantes combinan los conocimientos de física y de matemáticas para dar solución a problemas en la física. Hu y Rebello (2013) utilizaron la integración cognitiva para analizar las formas en que los estudiantes aplican el concepto de integral en la resolución de problemas en física. Huynh y Sayre (2019) estudiaron la mezcla de conceptos de física y signos matemáticos identificando que los mismos espacios de entrada pueden producir diferentes significados, debido a las variadas formas en que se pueden proyectar en el espacio mezclado.

De acuerdo con Gerson y Walter (2008), para los educadores e investigadores en educación matemática la integración cognitiva es tanto una herramienta (a modo de una lente para iluminar la comprensión de los estudiantes) como un tema de estudio, usado para conceptualizar de mejor forma los significados que construyen los estudiantes y para reseñar la comprensión que adquieren sobre conceptos matemáticos. Bou et al. (2015) aplicaron la integración cognitiva para conocer sobre la creatividad computacional en matemáticas.

Como mencionan Van den Eynde et al. (2020), la integración de matemáticas con física es una tarea compleja que no solo consiste en yuxtaponer los respectivos componentes sino en integrarlos conceptualmente, por lo que la teoría de la integración cognitiva se convierte en una herramienta útil para estudiar, analizar e interpretar las complejas y multifacéticas actividades de los estudiantes cuando combinan conceptos y habilidades de ambas asignaturas, además de que proporciona un mecanismo explicativo de cómo las personas reúnen o integran mentalmente espacios aparentemente dispares para obtener nuevos conocimientos en los espacios combinados resultantes.

En el trabajo que se presenta la integración cognitiva se analizó bajo el enfoque de Bing y Redish (2007), ya que en las acciones de los estudiantes se identificaron conexiones entre los espacios o elementos de los espacios mentales, su modelo permite elaborar un esquema de integración con dos espacios de entrada y uno de salida; identificar procesos de alcance sencillo, con la combinación de elementos de un mismo espacio; de alcance doble, al combinar elementos de ambos espacios de entrada; mezclar contenidos de los espacios de entrada de forma no lineal ni determinista, y coadyuvar a interpretar una integración cognitiva con base en los elementos de entrada, el contexto físico y el razonamiento del estudiante.

El razonamiento covariacional

De acuerdo con Thompson y Carlson (2017), el razonamiento covariacional surgió como un constructo teórico a finales de los ochenta y principios de los noventa del siglo XX; fue caracterizado por Confrey (1988, p. 137) en términos de "coordinar los valores de dos variables a medida que cambian" y descrito por Saldanha y Thompson (1998, p. 299) como "la noción […] de alguien que tiene en mente una imagen sostenida de los valores de dos cantidades simultáneamente". Para Thompson (1994) y Carlson (1998), esta forma de pensamiento es esencial para desarrollar una imagen madura del concepto de función, el cual es fundamental para el estudio de temas de cálculo.

Carlson et al. (2002) se abocaron a describir las acciones mentales de los estudiantes cuando interpretan funciones que representan eventos dinámicos y propusieron un marco que involucra un conjunto de cinco acciones mentales, asociadas con cinco comportamientos observables en un sujeto. Posteriormente Thompson y Carlson (2017) notaron que la mayoría de las obras citadas por autores como Confrey, Thompson o Carlson "empleaban el constructo del razonamiento covariacional para enmarcar la investigación sobre una idea que tuviera al razonamiento covariacional como su fundamento, pero observaron que ninguna de estas investigaciones había hecho aportaciones para desarrollar la idea del razonamiento covariacional" (Thompson y Carlson, 2017, p. 427). Fue Castillo-Garsow (2010) quien desarrolló la idea anterior cuando se enfocó en la variación en sí misma y clasificó las formas de

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

razonamiento de los estudiantes en: (a) discreta, cuando las cantidades se perciben en estados particulares que se forman por valores separados; (b) continua, cuando entre dos valores cualesquiera se percibe que puede haber valores intermedios; (c) continua gruesa, cuando la imagen implica imaginar el cambio como si ocurriera en trozos completos y sin una imagen de variación dentro del fragmento unitario; (d) continua suave, que implica imaginar un cambio en progreso, conceptualizando una variable como aquella que toma siempre valores en el flujo continuo y experiencial del tiempo; también identificó que para razonar covariacionalmente es esencial una conceptualización de los objetos multiplicativos.

Al tomar en consideración las ideas de Castillo-Garsow (2010), los investigadores Thompson y Carlson (2017) revisaron su aproximación teórica del razonamiento covariacional y propusieron una nueva clasificación para el constructo del razonamiento variacional. En la Tabla 1, la columna izquierda presenta los niveles de variación propuestos y la columna derecha la descripción de las acciones que identifican este tipo de razonamiento.

Tabla 1
Niveles principales de razonamiento variacional

Nivel	Descripción
Variación continua suave	Se exhibe cuando la persona piensa en la variación del valor de una cantidad como un aumento o disminución por intervalos, que pueden ser del mismo tamaño o no, anticipando que en cada intervalo el valor de la variable varía suave y continuamente
Variación continua gruesa	La persona piensa que la variación del valor de una cantidad o variable cambia por intervalos de un tamaño fijo que pueden ser de la misma magnitud, pero no necesariamente, en una variación continua gruesa con aumentos como de 0 a 1, 1 a 2, y así sucesivamente
Variación gruesa	Se da cuando una persona piensa que el atributo de una variable aumenta o disminuye sin pensar que esta podría tomar otros valores mientras cambia
Variación discreta	La persona cree que el atributo de una variable toma valores específicos cuando cambia de un valor a otro pero no prevé que la variable tome ningún valor intermedio
Sin variación	Se presenta cuando la persona imagina que una variable tiene un valor fijo
Variable como símbolo	La persona concibe una variable como si solo fuera un símbolo que nada tiene que ver con la variación

Fuente: Elaborada con datos de Thompson y Carlson (2017, p. 440).

Thompson y Carlson (2017) presentaron su visión del razonamiento covariacional como un constructo teórico en el que se conserva el énfasis que Thompson (1998) da al razonamiento cuantitativo y los objetos multiplicativos; así como las ideas de Confrey (1988) y Carlson et al. (2002) sobre la coordinación de los cambios en los valores de las cantidades, y las ideas de Castillo-Garsow (2010) sobre las formas en que un individuo concibe cantidades que varían; pero eliminaron la tasa de cambio que aparecía en el marco de trabajo de la covariación elaborado por Carlson et al. (2002).

En la columna izquierda de la Tabla 2 se presentan los niveles de covariación que fueron nuevamente redactados a partir de los niveles previamente utilizados en el marco de Carlson et al. (2002), en la columna derecha se muestran acciones que corresponden a las acciones que identifican las formas del razonamiento covariacional.

Tabla 2
Niveles principales de razonamiento covariacional

Nivel	Descripción
Covariación continua suave	La persona imagina que los cambios en el valor de una variable ocurren simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y que ambas variables varían sin inconvenientes y de forma continua
Covariación continua gruesa	Se presenta cuando una persona imagina que el valor de una variable cambia en tándem con el cambio en el valor de otra variable y concibe que ambas cambian con una variación continua troceada
Coordinación de valores	Una persona se imagina los valores de una variable (x) coordinados con los valores de otra variable (y) con la maniobra de crear una colección discreta de pares (x, y)
Coordinación bruta de valores	El observador forma una imagen de los cambios en los valores de las cantidades variando juntas, pero no imagina que los valores individuales estén coordinados y forma en su mente un vínculo no multiplicativo entre ellas
Precoordinación de valores	Se presenta cuando la persona visualiza los valores de dos variables variando de forma asíncrona: una variable cambia, luego la segunda, luego la primera, y así sucesivamente, y no anticipa la creación de pares de valores como objetos multiplicativos
Sin coordinación	El observador no tiene una imagen de variables que varían en tándem y se centra en la variación de una u otra variable sin lograr visualizar la coordinación de sus valores

Fuente: Elaborada con datos de Thompson y Carlson (2017, p. 441).

En este trabajo los razonamientos variacional y covariacional se analizaron con base en la propuesta de Thompson y Carlson (2017).

El concepto de *gasto*

La hidrodinámica tiene muchas aplicaciones en nuestra vida cotidiana: en la construcción de canales y acueductos, colectores pluviales, sistemas de abastecimiento de agua, distribución de combustible para máquinas y motores, sistemas de extinción de incendios, prensas hidráulicas, sistemas de nivelación, sistemas hidropónicos, etcétera (Briceño, 2018). Específicamente el concepto de *gasto hidráulico* como parte de la hidrodinámica se aborda mediante el análisis de la cantidad de un líquido que pasa uniformemente por un tubo o canal abierto de sección conocida y el tiempo que tarda en pasar por un punto determinado, o también, a través del área transversal del fluido en movimiento y su rapidez.

El análisis de este concepto se realizó desde tres puntos de vista: (a) del razonamiento cuantitativo de los estudiantes, durante la resolución de problemas numéricos sobre la cuantificación de áreas, volúmenes de cilindros, gasto hidráulico, volumen surtido y tiempo transcurrido; (b) del razonamiento cualitativo cuando se establecen

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

relaciones entre la altura y el radio con el volumen del cilindro, la relación del volumen surtido y el tiempo de llenado del líquido con un suministro uniforme, y (c) del razonamiento variacional de acuerdo con el marco propuesto por Thompson y Carlson (2017).

Aunque no es el objetivo analizar lo que sucede al interactuar con el simulador, la idea que tomamos de este es el dinamismo que hace que los estudiantes la asocien con el cambio en los valores volumen y tiempo, y suponemos que los estudiantes están interpretando el gasto hidráulico en el sentido de establecer una relación entre el volumen y el tiempo o bien entre el área de la sección transversal y la rapidez del fluido.

Métodos y procedimientos

Se considera importante conocer la forma en que los estudiantes dan sentido a sus ideas matemáticas cuando analizan fenómenos dinámicos, y en particular cómo movilizan o no su razonamiento variacional y covariacional para apoyar su entendimiento tanto del concepto físico como del de su representación matemática.

Para esto se realizó una investigación descriptiva ubicada en una perspectiva cualitativa, la cual tiene como objetivo la descripción de las cualidades de un fenómeno para obtener un entendimiento lo más profundo posible, y que el investigador pueda dar sentido o descifrar acciones que las personas desarrollan al adoptar una visión holística, en la que se valoren más los procesos que los resultados (Mendoza, 2006).

Los participantes

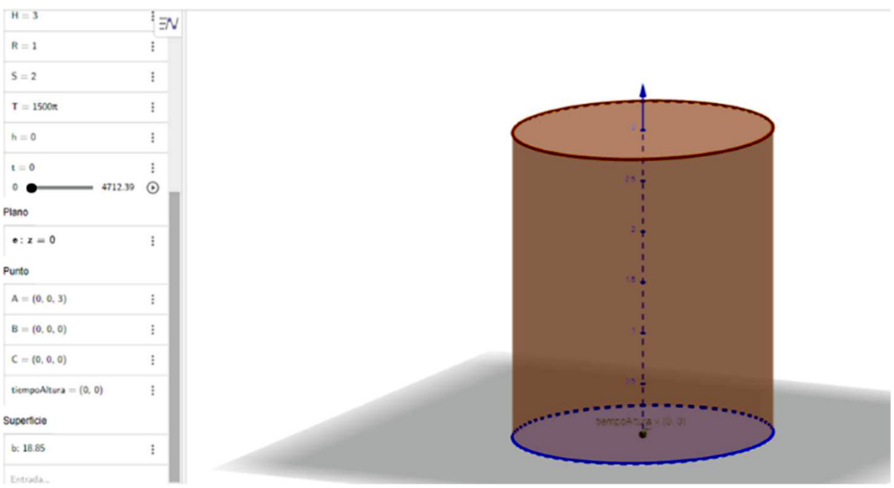
Participaron cinco estudiantes inscritos en un primer curso de Física de un bachillerato en México, cuyas edades oscilaban alrededor de los 15 años. Estos fueron seleccionados de acuerdo con los siguientes criterios: que aceptaran participar en la investigación, que contaran con un equipo de cómputo o teléfono inteligente y tuvieran conectividad a internet; que tuvieran asistencia constante a clase y cumplimiento regular de las actividades del semestre. Las sesiones de trabajo se aplicaron en un horario extraescolar.

Las actividades

Se diseñaron cinco actividades que incorporaron el uso de un simulador del llenado de un recipiente cilíndrico sin fuga, como una variación del problema de la botella utilizado por diversos autores (Carlson, 1998; Carlson et al., 2002; Johnson, 2013). A cada equipo se le proporcionó el enlace para acceder al simulador para ser operado a voluntad por los estudiantes. El diseño de las actividades incluyó preguntas que requerían de un razonamiento variacional o covariacional por parte de los estudiantes, en particular al momento de observar el cambio de altura o volumen durante el llenado del recipiente o la covariación entre el volumen y el tiempo al llenar un recipiente.

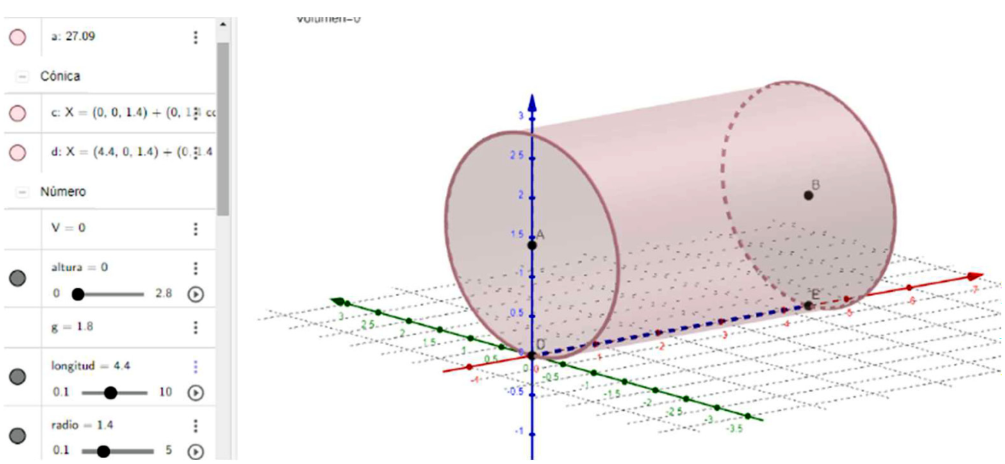
Para el desarrollo de la actividad (0) se utilizó el simulador *Llenado cilindro* en posición vertical (Figura 1) elaborado en GeoGebra por Cruz (2018); en la actividad (4) el simulador *Volumen de un cilindro horizontal* (Figura 2) elaborado en GeoGebra por Flores (2018).

Figura 1
Vista del cilindro en posición vertical



Fuente: Simulador *Llenado cilindro* elaborado en GeoGebra por Cruz (2018), https://www.geogebra.org/classic/ytppctfw

Figura 2
Vista del cilindro en posición horizontal



Fuente: Simulador *Volumen de un cilindro horizontal* elaborado en GeoGebra por Flores (2018) https://www.geogebra.org/classic/vhrn9ekc

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

Implementación de las actividades

Las actividades se implementaron en una modalidad sincrónica y virtual mediante una aplicación de colaboración y trabajo mixto. Uno de los autores del presente trabajo, que fungió como profesor, diseñó el espacio de trabajo denominado "Actividad R.C." en la plataforma para implementar las actividades, lo que permitió la comunicación grupal y la distribución de cuadernillos de trabajo.

Posteriormente, en el espacio general, se crearon dos salas en las que trabajaron los equipos 1 y 2 respectivamente, cuyo número de integrantes se modificó a lo largo de las actividades. Se llevaron a cabo cinco sesiones de trabajo en las que los estudiantes realizaron cinco actividades, cada una de ellas en sesión grupal sincrónica cuya duración varió. Los estudiantes trabajaron en sus respectivas salas durante una hora, en pares o tríos dependiendo del número de asistentes, y al final de la actividad se les solicitó que guardaran su trabajo con las respuestas consensuadas; el profesor transitó entre una y otra sala para observar el trabajo.

La recolección de datos

Los instrumentos de recolección de datos fueron: cuadernillos digitales que contenían las actividades, grabaciones en audio y video de cada una de las sesiones de trabajo, archivos en Word o PDF con las respuestas escritas o dibujos y comentarios emitidos mediante un chat del grupo.

En este documento se reporta sobre el trabajo de los estudiantes del equipo 2 en las actividades (0) y (4). Se seleccionó este equipo debido a que asistió regularmente a las sesiones, no hubo variación en el número de sus integrantes y entregó de forma completa todas las actividades propuestas, eventos que se consideró que podrían disminuir un sesgo en el análisis. La actividad (0) se eligió porque en ella el énfasis está en el concepto de gasto hidráulico, a partir de su definición, cálculo de superficies circulares y volúmenes de cilindros, así como el cálculo del gasto cuando se conocen el volumen del líquido y el tiempo que tarda en surtirse, o cuando se sabe el área de la sección transversal del líquido que pasa por un conducto y la rapidez de este. La actividad (4) se eligió porque brinda evidencia del razonamiento covariacional de los estudiantes a partir del trazado de una gráfica altura-volumen de un líquido, en una situación de variación no lineal durante el llenado de un recipiente cilíndrico colocado en posición horizontal.

El análisis se efectuó aplicando la herramienta teórica de la integración cognitiva de los espacios de entrada de matemáticas y física; los elementos teóricos del razonamiento variacional de los estudiantes al trabajar con las magnitudes volumen y altura, y del razonamiento covariacional al trabajar la actividad del llenado del recipiente cilíndrico.

Análisis de datos y discusión de resultados

Los datos fueron extraídos de las respuestas obtenidas a partir de los cuadernillos digitales, las gráficas dibujadas y los comentarios emitidos en el chat del grupo por Juan y Frank. Se revisaron los trabajos escritos y después se contrastaron con lo que mencionaron en las grabaciones en audio y video de la sala 2 para conocer si utilizaron expresiones algebraicas, si respondieron correctamente cada uno de los incisos de las actividades y si explicaron en forma verbal sus procedimientos.

Actividad (0). Elementos del gasto hidráulico

Los estudiantes en una sesión previa habían trabajado con las expresiones:

$$A = \pi r^2 \tag{1}$$

para el volumen de un cilindro en posición vertical

$$V = A h \tag{2}$$

así mismo se les proporcionó la definición de gasto hidráulico y dos expresiones para su cálculo, la primera en términos del volumen y el tiempo:

$$Q = V / t \tag{3}$$

y la segunda en términos del área de su sección transversal y la velocidad del fluido:

$$Q = A v \tag{4}$$

Sobre la integración cognitiva de las matemáticas con la física en la actividad (0)

En la actividad (0) se identificaron integraciones cognitivas cuando en los incisos *(a) Calcular el área de un cilindro cuyo radio es de 1.5 m* y *(b) Calcular el volumen de un cilindro cuyo radio es de 10 cm y altura de 15 cm* Juan y Frank identificaron los valores para el radio $r =$ 1.5 m y $r = 0.1$ m (10 cm), asociaron el valor 3.14 con el símbolo π y la variable r con la magnitud física del radio; en el inciso (b) primero utilizaron la magnitud física del radio para calcular el área ($A = \pi r^2$) del círculo que es la base del cilindro. Además asociaron el valor obtenido de (A) para calcular el volumen ($V = A h$) del cilindro.

En el inciso *(c) Calcular el gasto en un conducto por el que pasa un volumen de 28 m³ en un tiempo de 2 minutos*, cuando Juan y Frank asociaron la literal t con el tiempo y la literal Q con el gasto e introdujeron la expresión matemática $Q = V / t$ para calcular el gasto.

En el inciso *(d) Calcular el gasto en un conducto cuya área de sección es de 0.5 m² por el que pasa un fluido con rapidez de 0.6 m/s*, cuando asociaron la literal v con la rapidez del fluido y calcularon el gasto utilizando la expresión $Q = A v$.

Se reconoció una integración cognitiva entre dos espacios de entrada: el *espacio de matemáticas* (en adelante EM) y el *espacio de magnitudes físicas* (en adelante EMF), debido a que Juan y Frank asociaron símbolos algebraicos con expresiones matemáticas que

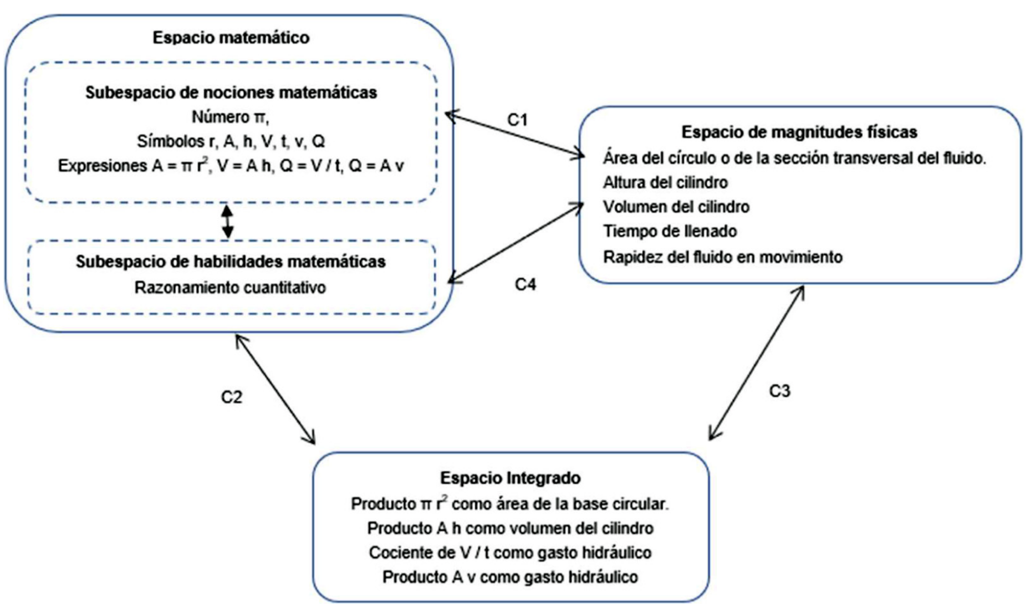
ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

codifican las relaciones físicas del área y el volumen de un cuerpo en términos del radio y la altura del mismo (Bing y Redish, 2007), y porque estas expresiones se pueden considerar como elementos que combinan las matemáticas con la física cuando son usadas para representar el significado de los conceptos físicos que ellas simbolizan (Schermerhorn, 2018). En los incisos (b) y (c) los estudiantes asociaron símbolos algebraicos con expresiones matemáticas que codifican la relación física del gasto hidráulico en términos de las magnitudes físicas volumen y tiempo.

Durante el análisis de esta actividad se consideró necesario dividir el EM en dos subespacios: *nociones matemáticas* (en adelante SENM) y *habilidades matemáticas* (en adelante SEHM), porque se identificó que los estudiantes hicieron uso de símbolos, expresiones algebraicas y que razonaron cuantitativamente.

Los dos espacios de entrada (EM y EMF) se relacionan mediante una integración cognitiva (Figura 3). La flecha C1 indica que el SENM se combina con el EMF integrándose cognitivamente en una secuencia que permite el cálculo del área de un círculo, que al ser multiplicada por la altura determina el volumen del cilindro, respuestas a los incisos (a) y (b) respectivamente. Las flechas C2 y C3 representan la integración cognitiva de los espacios de entrada, en los que se considera la relación entre el volumen del cilindro y el tiempo de llenado mediante un cociente, o el producto del área de la sección transversal del fluido por la rapidez de este para calcular el gasto hidráulico, incisos (c) y (d). La flecha C4 representa el razonamiento cuantitativo del SEHM que Juan realizó cuando asignó valores específicos en las expresiones

Figura 3
Diagrama de integración cognitiva del Equipo 2 Actividad 0



Fuente: Adaptado de Bing y Redish (2007).

matemáticas (1), (2), (3) y (4) para calcular el área y volumen del cilindro, valores que después se usaron en las expresiones matemáticas para el cálculo del gasto hidráulico, y que se manifiestan en el espacio integrado, ya que Schermerhorn (2018) considera las ecuaciones como formas simbólicas que cuando se usan juntas llevan asociado un significado de los símbolos cuya interpretación debe considerar, más allá de la lectura de las estructuras matemáticas, la comprensión conceptual.

Sobre el razonamiento de Juan y Frank durante su trabajo en la actividad (0).

En esta actividad se pensó en la integración cognitiva y el razonamiento "variacional" en términos cuantitativos para tratar de centrar la atención del estudiante en que las variables radio, área y volumen pueden cambiar en los incisos (a) y (b). En este caso entendemos que la variación está en sus niveles más básicos de variación discreta donde se toman valores específicos para las variables.

Para dar respuesta a los incisos (a) y (b), Juan y Frank sustituyeron dos valores del radio para calcular los valores de las áreas, lo que es evidencia de que los estudiantes visualizan que asignar valores específicos de la variable radio da como resultado valores específicos para el área (A), y si estos valores se asignan con valores específicos del tiempo de llenado en la expresión $Q = V / t$ estas variables dan como resultado valores específicos para el gasto hidráulico Q. En el inciso (c) sustituyeron los valores del volumen y el tiempo de llenado y en (d) los del área y la rapidez del fluido, lo que es evidencia de que los estudiantes visualizan que asignar valores específicos a estas variables también dan como resultado valores específicos para el gasto hidráulico Q, es decir que, de acuerdo con Thompson y Carlson (2017), en estos casos se ubican en el nivel de razonamiento de variación discreta (ver Tabla 1).

Sobre el concepto de gasto hidráulico en la actividad (0).

En el inciso (c) se solicitó calcular el gasto hidráulico, para lo cual se proporcionó el volumen de líquido y el tiempo que tarda en fluir; los estudiantes se percataron de que debían realizar un paso intermedio, primero calcular el área de la base del cilindro para dar respuesta al inciso (a), después obtener el volumen del cilindro para el inciso (b), es decir, identificaron las magnitudes físicas necesarias para realizar los cálculos y posteriormente medir el tiempo de llenado para obtener el gasto. En el inciso (d) se solicitó calcular el gasto en un conducto cuya área de sección y rapidez del fluido eran conocidas, los estudiantes identificaron los valores de las magnitudes involucradas y obtuvieron el valor del gasto hidráulico como resultado de relacionar el área y la velocidad.

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

Análisis de la actividad (4): razonamiento covariacional en una situación de cantidades variando en tándem

El propósito de esta actividad fue investigar sobre el razonamiento covariacional de los estudiantes, al usar el simulador *Llenado de un cilindro horizontal* elaborado en GeoGebra (Flores, 2018), el cual presenta un tanque vacío, sin fuga y que se llena con un gasto hidráulico uniforme.

Apoyados en el simulador dinámico los estudiantes observaron el proceso de llenado del cilindro desde una de las caras circulares y razonaron (1) sobre cantidades en una situación de cambio de una sola variable, (2) sobre el cambio conjunto de las variables altura y volumen del líquido, (3) para describir el fenómeno y dar cuenta de lo implicado en la situación y (4) para elaborar una gráfica y representar el cambio de la altura en relación con el cambio del volumen del líquido. Las instrucciones proporcionadas a los estudiantes, del inciso (a) al (e), tuvieron por objetivo familiarizarlos en relación con la localización de los deslizadores y el manejo de este nuevo simulador, y del inciso (f) al inciso (p) el objetivo de permitir que los estudiantes observaran el proceso de llenado del cilindro en posición horizontal para elaborar la gráfica correspondiente.

El trabajo de Juan y Frank en la actividad (4).

Los estudiantes leyeron las instrucciones de los incisos (a) donde se solicita que se teclee el enlace: https://www.geogebra.org/classic/vhrn9ekc, (b) se pide que ubiquen los deslizadores para un cierto radio (R) y longitud (H), (c) se solicita que observen los efectos de accionar los deslizadores radio y longitud, sobre la imagen del cilindro, (d) se solicita que se coloquen los deslizadores en $R = 1$ y $l = 3$ unidades, y finalmente en (e), localizar el deslizador altura, el cual permite iniciar la operación automática del simulador.

Los estudiantes del equipo 2 examinaron las instrucciones del inciso *(f) Presiona el botón altura para iniciar el llenado, observa y responde: ¿Qué cambia en el llenado del cilindro y qué permanece constante?*

Después de intercambiar opiniones sobre el comportamiento del sistema respondieron:

01 Juan: *Lo que cambia es tanto el volumen como la altura.*

Al utilizar las palabras "tanto … como" se identifica que el estudiante percibe un cambio en las variables volumen y altura del líquido y de manera implícita que estos están coordinados, es decir, se expresa una incipiente conciencia de la covariación entre ellas. En contraste con la inestabilidad mostrada en la actividad (2), cuando se trabajó sobre la covariación en una situación de relación directamente proporcional durante el llenado de un cilindro colocado verticalmente, en sus respuestas se mostraron evidencias de que la forma de razonar covariacionalmente del alumno se estabilizó conforme avanzó en su trabajo.

A continuación leyeron las instrucciones del inciso *(g) Entre las variables identificadas selecciona y presta atención a las variaciones de la altura y el volumen del líquido, y en seguida acciona el simulador*. Después de observar el proceso de llenado de la parte inferior del cilindro, Juan y Frank leyeron las instrucciones del inciso *(h) Considera el centro de la cara circular como el límite para una partición en dos mitades del cilindro, una inferior y otra superior*, y Juan respondió al cuestionamiento del inciso *(i) Elige y subraya la opción correcta. Durante el llenado del cilindro horizontal, en su parte inferior, conforme aumenta el volumen del líquido el cambio en su altura: a) aumenta, b) disminuye, c) es igual*:

02 Juan: *Disminuye* [se interpreta como que el cambio en la altura del líquido al principio es más rápido y después más lento].

En el inciso (j) se indica*: Elige y subraya la opción correcta. Durante el llenado del cilindro horizontal, en la parte superior de la cara circular, conforme aumenta el volumen del líquido la altura de este: a) aumenta, b) disminuye, c) es igual*.

Los estudiantes observaron con atención el llenado de la parte superior del cilindro, y con base en sus observaciones respondieron:

03 Juan: *Aumenta* [se interpreta como que el cambio en la altura del líquido al principio es más lento y después más rápido].

La respuesta de Juan permitió identificar que el estudiante percibió que al llegar al punto de inflexión la situación se invierte.

Después de leer las indicaciones del inciso *(k) Modifica el valor del radio de 1 a 2 unidades, reinicia el simulador empezando desde un cilindro vacío y ahora observa la evolución de ambas variables*, los estudiantes observaron nuevamente el cambio de la altura y el volumen en la pantalla del simulador, lo que les permitió abordar los siguientes cuestionamientos.

En el inciso *(l) Elige y subraya la opción correcta. Con un mismo gasto hidráulico, en la parte inferior de la cara circular, si el radio del cilindro cambia de 1 a 2 unidades, el cambio en la altura del líquido para el radio 2 comparado con el radio 1: a) aumenta, b) disminuye, c) es igual*, Juan respondió:

04 Juan: *Menor* [el estudiante interpreta que comparado el cambio en la altura del líquido del cilindro de radio 1 con el cilindro de radio 2, este es menor para el segundo].

Y en el inciso *(m) Elige y subraya la opción correcta. Con un mismo gasto hidráulico, observa la parte superior de la cara circular, si el radio del cilindro cambia de 1 a 2 unidades, el cambio en la altura del líquido en el cilindro de radio 2 en comparación con el de radio 1: a) aumenta, b) disminuye, c) es igual*, la respuesta de Juan fue:

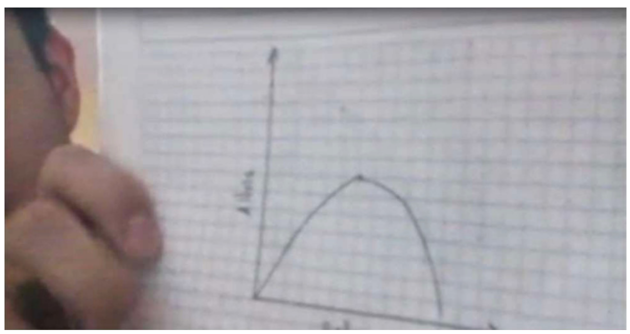
05 Juan: *Menor* [el estudiante interpreta que comparado el cambio en la altura del líquido del cilindro de radio 1m con el cilindro de radio 2 m, es menor para el segundo].

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

Ambas respuestas dan indicio de que los estudiantes han identificado que a mayor dimensión del radio el volumen del cilindro es mayor y por lo tanto si se proporciona un mismo volumen la altura que alcanza el líquido es menor.

A continuación, Juan y Frank leyeron la instrucción del inciso *(n) Con base en lo observado elabora una gráfica que relacione la altura en función del volumen del líquido durante el ciclo de llenado completo*. Procedieron a la elaboración de la gráfica y en un primer intento la elaborada por Juan mostraba una curva creciente que representaba un aumento en la altura para la parte inferior del cilindro y una curva decreciente que representaba una disminución en la altura mientras que el volumen del líquido aumentaba (Figura 4).

Figura 4
Primera grafica del llenado del cilindro horizontal, elaborada por Juan



Fuente: Tomado de la pantalla del chat del grupo.

Para orientar la reflexión de los estudiantes, el profesor les solicitó que explicaran la forma de su gráfica.

06 Juan: *En la parte inferior de la cara circular primero aumenta la altura y en la segunda disminuye.*

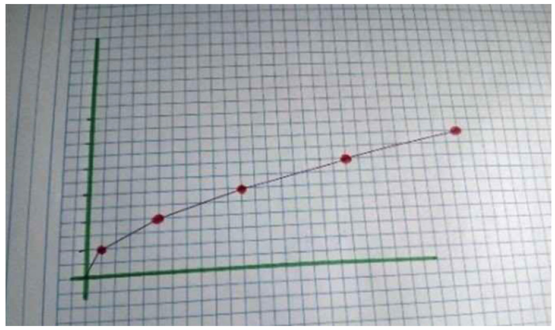
Se percibe que el estudiante interpreta de forma inadecuada el llenado del cilindro (Figura 4), puesto que, durante el llenado de este, el volumen siempre aumenta y por consiguiente la altura también aumenta.

El profesor sugirió que reflexionara sobre el proceso de llenado mostrado en la pantalla del simulador y que lo accionara las veces que considerara necesarias para observar, primeramente, la parte inferior del cilindro hasta tener una idea clara sobre el comportamiento de las variables y que lo contrastara con lo mostrado en su gráfica. Lo anterior le llevó cierto tiempo y después de analizar el comportamiento del líquido en el simulador el estudiante Juan respondió:

07 Juan: *Creo que ya entendí.*

Y procedió a la elaboración de una nueva gráfica (Figura 5).

Figura 5
Grafica de llenado de la mitad inferior del cilindro horizontal, elaborada por Juan



Fuente: Tomado de la pantalla del chat del grupo.

Los estudiantes leyeron el cuestionamiento del inciso *(o) ¿Por qué piensas que tiene esa forma?*

08 Juan: *Ya que primero el llenado va de lento a rápido, y después continúa de rápido a lento.*

Después leyeron el inciso *(p) ¿Qué pasa con el cambio de la altura y del volumen en la mitad exacta del cilindro?*

09 Juan: *Se repite el proceso de llenado, si primero iba de menos a más, después de más a menos.*

En la gráfica (Figura 5) se observa que los ejes no están identificados con las etiquetas "altura" y "volumen", pero dado que el estudiante en dos gráficas anteriores colocó la variable altura en el eje de las ordenadas y la variable volumen en el eje de las abscisas, se podría suponer que hizo lo mismo en este caso. Si se acepta esta conjetura, cuando Juan colocó puntos de referencia de color rojo con un aumento de 2 unidades para cada intervalo de las ordenadas, los valores corresponderían a 2, 4, 6, 8 y 10 unidades de altura y a 1, 5, 11, 19 y 28 unidades de volumen en el eje de las abscisas. De esta forma, el estudiante tomó la altura como variable independiente y el volumen como variable dependiente, con lo que se aprecia que interpretó y representó gráficamente de forma adecuada la relación altura-volumen durante el llenado de la primera mitad del cilindro.

Los estudiantes leyeron el cuestionamiento del inciso *(q) ¿Qué pasa con el cambio de la altura y del volumen en la mitad exacta del cilindro?* y la respuesta de Juan fue:

10 Juan: *Sí igual, pero al revés.*

Se le pidió que explicara y dijo:

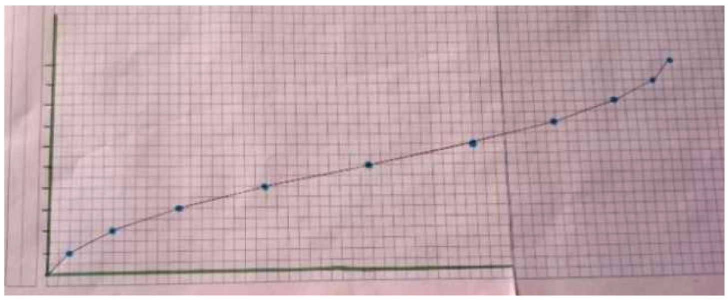
11 Juan: *Empieza con alturas pequeñas que van aumentando y la curva se voltea.*

Se considera que Juan verbalizó la consciencia de cambio del volumen mientras consideró incrementos uniformes de la altura del líquido, estos valores se asocian con comportamientos de un razonamiento de covariación continua gruesa (Tabla 2) de Thompson y Carlson (2017).

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

El profesor solicitó a los estudiantes que elaboraran una gráfica del proceso de llenado de todo el cilindro, en esta gráfica que es continuación de la anterior (Figura 6) se observa que los ejes de coordenadas tampoco están identificados con las etiquetas "altura" y "volumen", sin embargo, el estudiante colocó marcas equidistantes a cada dos unidades en el eje de las ordenadas, las cuales le permitieron observar incrementos uniformes de altura con sus correspondientes aumentos en el volumen.

Figura 6
Grafica del llenado total del cilindro horizontal elaborada por Juan



Fuente: Tomado de la pantalla del chat del grupo.

Cuando se le pidió que explicara la forma de su gráfica la respuesta fue:

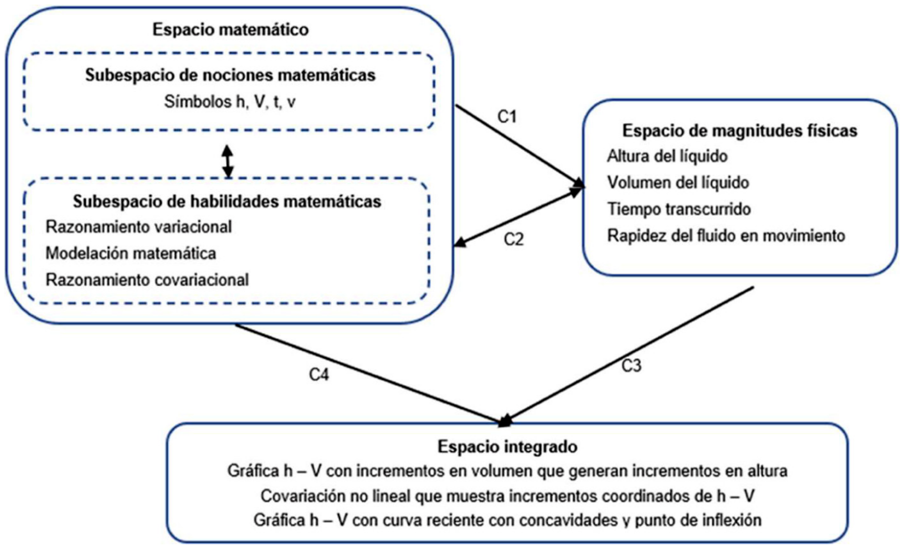
12 Juan: *En la primera parte el volumen del cilindro es menor por lo que un mismo volumen nos da una mayor altura.*

En este momento el estudiante describe de manera adecuada la forma de su gráfica, en la que se identifica el cambio conjunto de ambas variables, con lo que se aprecia que el estudiante verbaliza la consciencia del cambio del volumen del líquido mientras se consideran cambios uniformes de la altura, además construye una curva suave, lo que indica que es una línea sin puntos angulosos y cuya variable cambia llana y continuamente, con indicaciones claras de los cambios de concavidad, lo que se asocia con comportamientos de una covariación continua gruesa (Thompson y Carlson 2017).

Sobre la integración conceptual de las matemáticas con la física en la actividad (4).

Durante la actividad (4) en el trabajo de Juan y Frank (Figura 7) se identificaron integraciones cognitivas cuando (a) los estudiantes establecieron conexiones entre los símbolos (h, V, t, v) del SENM con los conceptos *altura del líquido*, *volumen del líquido*, *tiempo de llenado* y *rapidez del fluido en movimiento* del EMF, relación que se especifica con la flecha (C1); (b) cuando en el inciso (f) establecieron una relación entre las variables *altura y volumen* del EMF, mediante un proceso de alcance sencillo (ya que solo se importan elementos de un espacio mental en la organización del otro), que sirvió para expresar una incipiente conciencia del *razonamiento covariacional* del SEHM, relación que se muestra con la flecha (C2); (c) cuando en los incisos (i), (j), (l) y (m) establecieron conexiones entre el *razonamiento covariacional* del SEHM con los cambios coordinados entre las variables *altura y volumen del líquido* del EMF.

Figura 7
Diagrama de integración cognitiva del equipo 2 en la actividad 4



Fuente: Adaptado de Bing y Redish (2007).

Y en los inciso (o) y (p) establecieron relaciones que permitieron la construcción de una gráfica mediante la *modelación matemática* del SEHM con una línea curva que muestra concavidad y punto de inflexión, y cuando explicitan verbal y gráficamente la relación entre la *altura* y el *volumen* del líquido del EMF según la posición de la altura en la cara lateral del cilindro, ya que, de acuerdo con Gerson y Walter (2008), si bien las gráficas se ubican en un posicionamiento abstracto, una vez que son usadas para explicitar el comportamiento de un fenómeno físico se convierte en un elemento integrado, relaciones que se indican mediante las flechas (C3) y (C4).

Sobre el razonamiento de los estudiantes en la actividad (4).

En los incisos (i) y (j) los estudiantes Frank y Juan identificaron acertadamente los cambios que se suscitan en el aumento de altura al pasar de la mitad inferior a la mitad superior del cilindro, cuando notaron que al aumentar el volumen del líquido conforme se va acercando a la mitad exacta del círculo el cambio de la altura se va haciendo más lento y en la parte superior conforme se va alejando de la mitad exacta del círculo el cambio de la altura va siendo más rápido.

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

Por otra parte, en los incisos (l) y (m), al aumentar el radio del cilindro, los estudiantes identificaron acertadamente que el cambio de la altura del líquido es menor que cuando se tiene un radio de cilindro menor, y en el inciso (n) en que se solicitó elaborar una gráfica que relacionara el aumento de la altura con el aumento del volumen del líquido durante el ciclo completo de llenado, los estudiantes del equipo 2 elaboraron una gráfica con un punto de inflexión que coincidía con el valor de la altura exactamente a la mitad de la cara circular del cilindro (Figura 6), donde se muestra una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad en la gráfica altura-volumen y se exhiben acciones que se asocian con comportamientos de un razonamiento de covariación continua gruesa (Thompson y Carlson 2017).

Sobre el concepto de gasto hidráulico en la actividad (4).

En esta actividad no se trabajó de forma explícita el concepto de gasto hidráulico, se investigó de qué manera se manifiesta el razonamiento covariacional de los estudiantes en una situación dinámica del llenado de un cilindro colocado de forma horizontal. Una primera observación es que la gráfica que describió el llenado del recipiente (Figura 6) fue elaborada como un proceso con una variación continua gruesa en la que alturas iguales dan origen a variaciones de volumen de forma no lineal.

Analizando el comportamiento de otro par de variables, se observa que se presenta una covariación continua entre el volumen suministrado y el tiempo, en una relación directamente proporcional con una proporción constante, lo que puede ser identificado como gasto hidráulico, aunque no haya sido mencionado por los estudiantes en esa forma. Sin embargo, la escala de tiempo que utiliza el simulador no está relacionada con el tiempo "real", es decir, ambos simuladores utilizan su propia escala de tiempo, por lo que tuvo que ser medido por los estudiantes mediante un cronómetro externo. Esta es la razón por la que en el llenado se habló de abastecimiento y no de gasto hidráulico.

Reflexiones finales

En este trabajo se asume que las matemáticas son fundamentales para el aprendizaje de las ciencias, entre ellas la física, por lo que es importante que los estudiantes logren su uso flexible para apoyar la comprensión de procedimientos y la construcción de conceptos físicos significativos. Sin embargo, diversos autores han documentado las dificultades que existen para lograr una fluidez matemática en los cursos de física, es decir, integrar cognitivamente los conocimientos y habilidades de ambas ciencias (Nguyen y Rebello, 2011; Huynh y Sayre, 2019); en este trabajo se han encontrado evidencias que coinciden con estas afirmaciones.

En consecuencia, se halló que los trabajos sobre integración cognitiva de Fauconnier y Turner (1998) así como de Bing y Redish (2007) proporcionaron una base teórica que permitió describir cómo los participantes crearon nuevos significados relacionados con cambios en la relación altura y volumen del líquido durante el llenado de un recipiente cilíndrico colocado en diferentes posiciones. De esta forma integraron selectivamente información previa de la física y las matemáticas para dar sentido al comportamiento de este fenómeno. Y para identificar esta forma de integración se realizó un análisis global del trabajo de los estudiantes y se contrastó con sus respuestas en cada uno de los incisos que conforman las actividades.

Tomando como base el esquema de dos espacios de entrada y uno de salida propuesto por Bing y Redish (2007) e ideas surgidas de subsecuentes aplicaciones en diversas áreas del conocimiento (Gerson y Walter, 2008; Van den Eynde et al., 2020), en este trabajo se propone un esquema conformado por dos espacios de entrada, el de magnitudes físicas y el de matemáticas, pero este dividido en dos subespacios, el de conocimientos matemáticos y el de habilidades matemáticas.

Durante el desarrollo de las actividades relacionadas con el gasto hidráulico se observó que, en una actividad aparentemente operativa para determinar un área, un volumen y el gasto hidráulico, fue posible identificar relaciones entre los dos subespacios de entrada, que a su vez conforman un espacio integrado, en el que los números, los símbolos y las expresiones matemáticas cobran sentido para los estudiantes en términos de áreas, volúmenes y gasto hidráulico.

Se identifica que el razonamiento covariacional es importante no solo para la comprensión de conceptos de ambas disciplinas sino para dar sentido a la combinación de estas, por lo que al analizar las evidencias obtenidas se buscaron comportamientos que dieran indicios del nivel de razonamiento variacional y covariacional de los estudiantes, que se contrastaron con el marco de Thompson y Carlson (2017).

En las acciones realizadas en la actividad (0) para el estudio del concepto de gasto, tanto Juan como Frank se ubicaron en el mismo nivel de razonamiento de variación discreta, pero esto no se mantuvo a lo largo de todas las actividades, ya que al inicio de cada actividad sus respuestas no fueron consistentes y mostraron lo que denominaremos un conocimiento "inestable", que difiere de "incorrecto", que es la forma en que Schermerhorn (2018) lo denomina. Después Juan pasó desde una incipiente conciencia de covariación a un periodo de inestabilidad, con un evidente tránsito entre niveles, y posteriormente a un razonamiento covariacional estable cuando identificó el comportamiento conjunto de la altura con el volumen del líquido y lo expresó verbal y gráficamente, lo que se asocia con comportamientos de un razonamiento de covariación continua gruesa (Thompson y Carlson 2017).

Agradecimientos

Los autores agradecen a sus instituciones Instituto Politécnico Nacional, al Colegio de Bachilleres y a los estudiantes que participaron en el desarrollo de la presente investigación por el apoyo brindado.

ie revista de investigación educativa de la Rediech
vol. 14 • 2023 • e1766 • ISSN: 2448-8550

Referencias

Bing, T. J., y Redish, E. F. (2007). The cognitive blending of mathematics and physics knowledge. *AIP Conference Proceedings*, *883*(1), 26-29. https://doi.org/10.1063/1.2508683

Briceño, V. (2018). *Hidrodinámica*. https://www.euston96.com/hidrodinamica/

Bollen, L., Van Kampen, P., Baily, C., y De Cock, M. (2016). Qualitative investigation into students' use of divergence and curl in electromagnetism. *Physical Review Physics Education Research*, *12*(2). https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.020134

Bou, F., Schorlemmer, M., Corneli, J., Gómez-Ramírez, D. J., Maclean, E., Smaill, A., y Pease, A. (2015). The role of blending in mathematical invention. En *Proceedings of the Sixth International Conference on Computational Creativity*. https://www.researchgate.net/publication/344271895_The_role_of_blending_in_mathematical_invention

Byerley, C., Yoon, H., y Thompson, P. W. (2016). Limitations of a "chunky" meaning for slope. En *Proceedings of the 19th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 596-604). https://www.researchgate.net/publication/328685839_Limitations_of_a_Chunky_meaning_for_slope/citations

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky y T. Dick (eds.), *Research in collegiate Mathematics education. III. CBMS issues in Mathematics education* (vol. 7, pp. 114-162). Mathematical Association of America.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378. https://doi.org/10.2307/4149958

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth* [Tesis de Doctorado]. Arizona State University. http://yeolcoatl.net/research/20100722b-Dissertation-cwcg-absolute_final-email_size.pdf

Confrey, J. (1988). *Their role in understanding exponential functions. Multiplication and splitting*. Conferencia presentada en la Annual Meeting of the North American Chapter for the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Dekalb, Illinois. https://doi.org/10.2307/749228

Cruz, C. (2018). *Llenado cilindro* (versión s.n.). GeoGebra. https://www.geogebra.org/classic/ytppctfw

Fauconnier, G., y Turner, M. (2003). Conceptual blending, form and meaning. *Recherches en Communication*, 19, 57-86. https://doi.org/10.14428/rec.v19i19.48413

Flores, E. R. (2018). *Volumen de un cilindro horizontal* (versión s.n.). GeoGebra. https://www.geogebra.org/classic/vhrn9ekc

Gerson, H., y Walter, J. (2008). How blending illuminate understandings of calculus, in electronic. En *Proceedings for the Eleventh Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics*. http://sigmaa.maa.org/rume/crume2008/Proceedings/Gerson%20LONG.pdf

Hu, D., y Rebello, N. S. (2013). Using conceptual blending to describe how students use mathematical integrals in physics. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, *9*(2), 020118. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.9.02011

Huynh, T., y Sayre, E. C. (2019). Blending of conceptual physics and mathematical signs. *arXiv*, 1909.11618v1. https://doi.org/10.48550/arXiv.1909.11618

Johnson, H. L. (2013). Designing covariation tasks to support students' reasoning about quantities involved in rate of change. En C. Margolinas (ed.), *Task design in Mathematics education. Proceedings of ICMI Study*, *22*(1), 213-222. Oxford, UK. https://www.researchgate.net/publication/270883226_Designing_covariation_tasks_to_support_students'_reasoning_about_quantities_involved_in_rate_of_change

Kurzer, M. (2018). *The contrast of covariational reasoning and other problem-solving methods of a calculus student* [Tesis de Licenciatura]. Portland State University. University Honors Theses. Paper 594. https://doi.org/10.15760/honors.603

Mendoza, R. (2006). *Investigación cualitativa y cuantitativa-Diferencias y limitaciones*. Monografías. https://www.prospera.gob.mx/Portal/work/sites/Web/resources/ArchivoContent/1351/Investigacion cualitativa y cuantitativa.pdf

Nguyen, D. H., y Rebello, N. S. (2011). Students' difficulties with integration in electricity. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, *7*(1), 010113. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.7.010113

Paoletti, T., y Moore, K. C. (2018). A covariational understanding of function: Putting a horse before the cart. *For the Learning of Mathematics*, *38*(3), 37-43. https://digitalcommons.montclair.edu/mathsci-facpubs/26/

Saldanha, L., y Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (1), 298-304. https://www.researchgate.net/publication/264119300_Re-thinking_co-variation_from_a_quantitative_perspective_Simultaneous_continuous_variation

Schermerhorn, B. P. (2018). *Investigating student understanding of vector calculus in upper-division electricity and magnetism: Construction and determination of differential element in non-Cartesian coordinate systems*. The University of Maine. https://core.ac.uk/download/pdf/217135806.pdf

Schermerhorn, B. P., y Thompson, J. R. (2019). Physics students' construction of differential length vectors in an unconventional spherical coordinate system. *Physical Review Physics Education Research*, *15*(1), 010111.

Sherin, B. L. (2001). How students understand physics equations. *Cognition and Instruction*, *19*(4), 479-541. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1904_3

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematic*, *26*, 229-274. https://doi.org/10.1007/BF01273664

Thompson, P. W. (1998). Quantitative concepts as a foundation for algebra. En *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1*. http://tpc2.net/IME/1994Thompson.pdf

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). https://www.researchgate.net/publication/302581485_Variation_covariation_and_functions_Foundational_ways_of_thinking_mathematically

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., y Pospiech, G. (2012). Modelling mathematical reasoning in Physics education. *Sci & Educ*, *21*(4), 485-506. https://doi.org/10.1007/s11191-011-9396-6

Van den Eynde, S., Schermerhorn, B. P., Deprez, J., Goedhart, M., Thompson, J. R., y De Cock, M. (2020). Dynamic conceptual blending analysis to model student reasoning processes while integrating mathematics and physics: A case study in the context of the heat equation. *Physical Review Physics Education Research*, *16*(1). https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010114

Weber, E., y Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educ Stud Math*, *87*, 67-85. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9548-0

Cómo citar este artículo:

Castañeda Ovalle, A., y García Rodríguez, M. L. (2023). Procesos de razonamiento covariacional durante la integración cognitiva de conceptos de matemáticas y de física en la interpretación del gasto hidráulico. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, *14*, e1766. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v14i0.1766